

**Динамическая дифракция нейтронов.
Усиленный эффект Штерна–Герлаха
для нейтрона в кристалле**

В.В.Федоров

В основу доклада положены работы:

1. Voronin V.V., Semenikhin S.Yu., Shapiro D.D., Braginetz Yu.P., Fedorov V.V., Nesvizhevsky V.V., Jentschel M., Ioffe A., Berdnikov Ya.A.
7-order enhancement of the Stern-Gerlach effect of neutrons diffracting in a crystal. Physics Letters, 2020, **B 809**, 135739.
2. Fedorov V.V., Kuznetsov I.A., Lapin E.G., Semenikhin S.Yu., Voronin V.V.
Diffraction enhancement and new way to measure neutron electric charge and the ratio of inertial to gravitational mass. Nucl. Instr. Meth., 2008, **A593**, 505–509.
3. Вежлев Е.О., Воронин В.В., Кузнецов И.А., Семенихин С.Ю., Федоров В.В.
Эффект аномального поглощения нейтронов, дифрагирующих по Лауэ, при углах Брэгга, близких к $\pi/2$. Письма в ЖЭТФ, 2012, **96**(1), 3–7.

История:

1. Kato N. **Pendellösung fringe in distorted crystals.**
 1. Fermat's principle for Bloch waves. J. Phys. Soc. Jap., 1964, **18**, 1785—1791.
 2. Application to two beam cases. J. Phys. Soc. Jap., 1964, **19**, 67–77.
 3. Application to homogeneously bend crystals. J. Phys. Soc. Jap., 1964, **19**, 971–985.
2. Kato N. **The energy flow of X-rays in an ideally perfect crystal: comparison between theory and experiments.** Acta Cryst., 1960, **13**, 349–356.
3. Zeilinger A., Shull C.G., Horne M.A., Finkelstein K.D. **Effective mass of neutrons diffracting in crystals.** Phys. Rev. Lett., 1986, **57**, 3089–3092.
4. Schmiedmayer J. **The equivalence of the gravitational and inertial mass of the neutron.** Nucl. Instr. Meth., 1989, **A284**, 59–62.

Псевдопотенциал Ферми

Для описания процессов рассеяния на связанных ядрах Ферми предложил псевдопотенциал, который описывает взаимодействие нейтрона с отдельным ядром так, чтобы уже в борновском приближении эффективное сечение рассеяния правильно выражалось через амплитуду:

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\nu) = \frac{2\pi\hbar^2}{\mu_\nu} a_\nu \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\nu).$$

Здесь a_ν – длина рассеяния ($a_\nu = -A_\nu$). μ_ν – приведенная масса нейтрона и ν -го ядра; \mathbf{r}_ν – координата ν -го ядра.

Вычисляя амплитуду рассеяния в борновском приближении для такого потенциала, получим правильное ее значение:

$$A_\nu = -\frac{\mu_\nu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d^3r = -a_\nu.$$

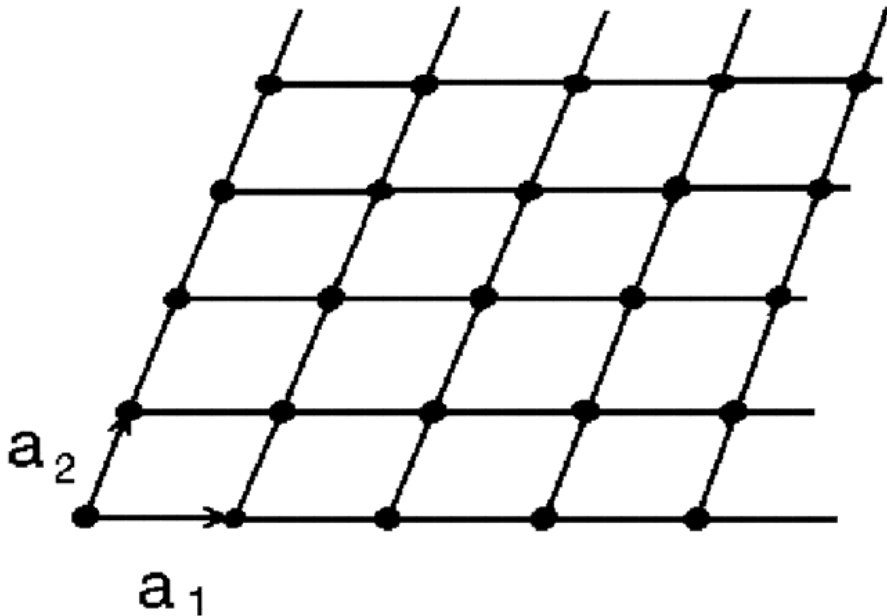
Когерентное рассеяние нейтронов кристаллическим веществом

Положения ядер в кристалле \mathbf{r}_n определяются тремя базисными векторами решетки, называемыми **векторами трансляций**, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ следующим образом:

$$\mathbf{r}_n = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{a}_i,$$

где n_i — целые числа.

Пример двумерной решетки:



Потенциал взаимодействия нейтрона с кристаллом можно записать в виде суммы потенциалов атомов, расположенных в узлах решетки \mathbf{r}_n :

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \sum_n V_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) = \\ &= \frac{2\pi\hbar^2}{\mu_n} \sum_n a_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n). \end{aligned}$$

Амплитуда рассеяния на таком потенциале будет иметь вид

$$A = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \sum_n \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} V_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) d^3r = -\frac{\mu}{\mu_n} \sum_n a_n \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) d^3r$$

$$= -\sum_n \frac{m_n}{\mu_n} a_n e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_n} \equiv -\sum_n b_n e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_n}.$$

b_n – «связанная» длина рассеяния n -м ядром. Если все ядра одинаковы, то когерентное рассеяние определяется когерентной частью амплитуды (или длины) рассеяния a , так что сечение (в пересчете на одно ядро) будет иметь вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{N} \left| \sum_n e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_n} \right|^2 = \frac{a^2}{N} \left| \sum_{n_1, n_2, n_3} e^{in_1\mathbf{q}\mathbf{a}_1 + in_2\mathbf{q}\mathbf{a}_2 + in_3\mathbf{q}\mathbf{a}_3} \right|^2 \equiv \frac{a^2}{N} F(\mathbf{q}),$$

где

$$F(\mathbf{q}) = \left| \sum_{n_1, n_2, n_3} e^{in_1\mathbf{q}\mathbf{a}_1 + in_2\mathbf{q}\mathbf{a}_2 + in_3\mathbf{q}\mathbf{a}_3} \right|^2 = \frac{a^2}{N} \left| \sum_{n_1} e^{in_1\mathbf{q}\mathbf{a}_1} \sum_{n_2} e^{in_2\mathbf{q}\mathbf{a}_2} \sum_{n_3} e^{in_3\mathbf{q}\mathbf{a}_3} \right|^2.$$

N – число атомов в кристалле.

Таким образом

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{N} F(\mathbf{q}) = \frac{a^2}{N} \left| \sum_{n_1} e^{in_1\mathbf{q}\mathbf{a}_1} \sum_{n_2} e^{in_2\mathbf{q}\mathbf{a}_2} \sum_{n_3} e^{in_3\mathbf{q}\mathbf{a}_3} \right|^2.$$

Каждая из сумм, входящих в произведение, (по формуле для суммы геометрической прогрессии) равна:

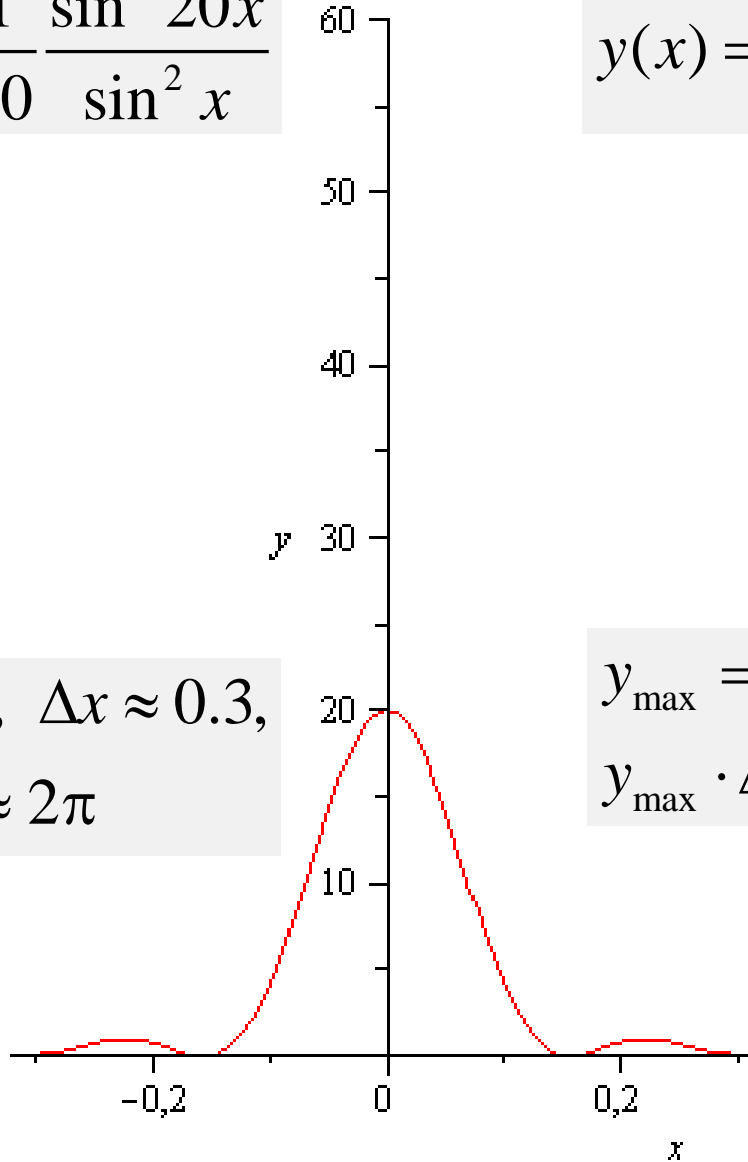
$$\left| \sum_{n_i=0}^{N_i-1} e^{in_i\mathbf{q}\mathbf{a}_i} \right|^2 = \left| \frac{1 - e^{iN_i\mathbf{q}\mathbf{a}_i}}{1 - e^{i\mathbf{q}\mathbf{a}_i}} \right|^2 = \frac{\sin^2 \frac{N_i\mathbf{q}\mathbf{a}_i}{2}}{\sin^2 \frac{\mathbf{q}\mathbf{a}_i}{2}} \xrightarrow{\frac{\mathbf{q}\mathbf{a}_i}{2} \rightarrow 0, \pi, 2\pi \dots} N_i^2,$$

$N = N_1 N_2 N_3$ – число атомов в кристалле.

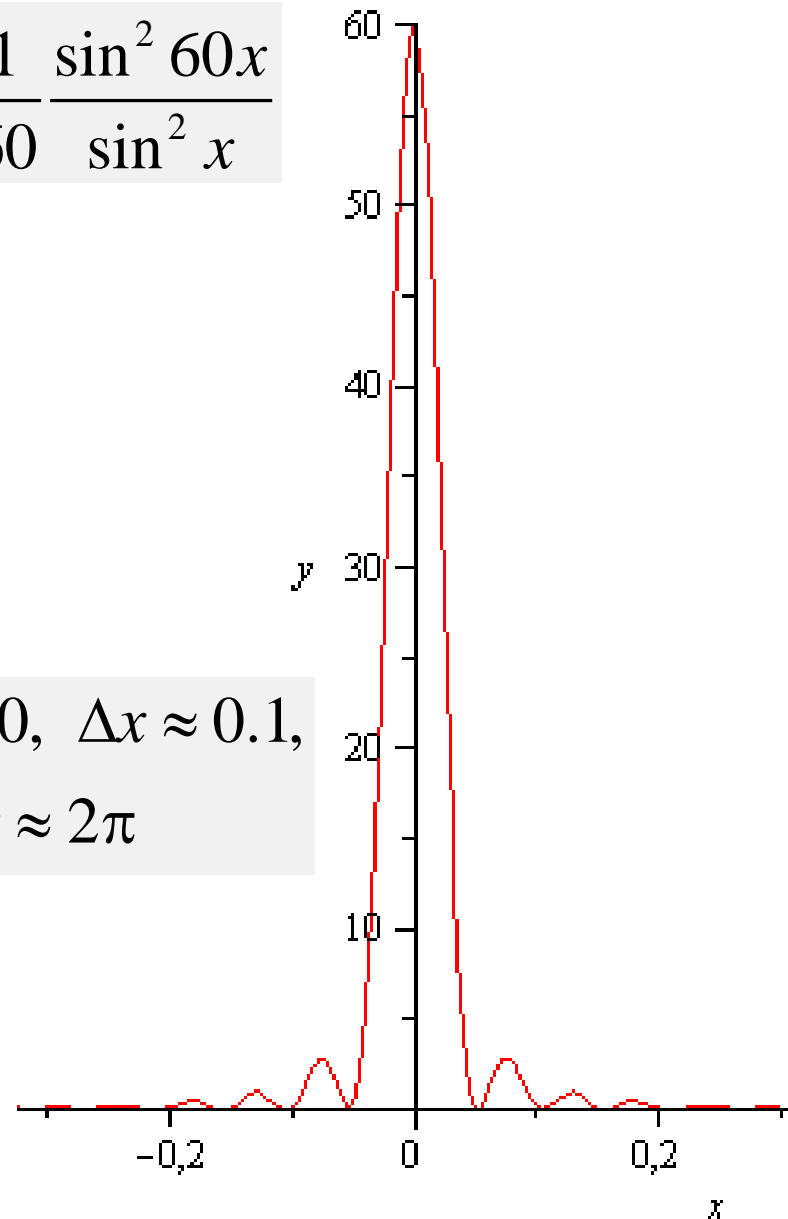
Функции $y(x)$ при $N_1=20$ и $N_1=60$ вблизи максимумов $x=0$

$$\left(x = \frac{\mathbf{qa}_1}{2} = \pi h \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{20} \frac{\sin^2 20x}{\sin^2 x}$$



$$y(x) = \frac{1}{60} \frac{\sin^2 60x}{\sin^2 x}$$



Таким образом, сечение (в пересчете на одно ядро) будет иметь вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_n} \right|^2 = a^2 \prod_{i=1}^3 \frac{1}{N_i} \frac{\sin^2 \frac{N_i \mathbf{q}\mathbf{a}_i}{2}}{\sin^2 \frac{\mathbf{q}\mathbf{a}_i}{2}} \equiv \frac{a^2}{N} F(\mathbf{q}).$$

При больших N оно имеет резкие максимумы для некоторых направлений, когда переданный кристаллу (или кристаллом) импульс \mathbf{q} удовлетворяет условию

$$\mathbf{q}\mathbf{r}_n = n_1 \mathbf{q}\mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{q}\mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{q}\mathbf{a}_3 = 2\pi n, \quad \text{где } n \text{ – целые числа.}$$

В результате, для этих направлений \mathbf{q} сечение рассеяния, приходящееся на одно ядро, возрастает в N раз, а это величина макроскопическая, поскольку $N \sim 10^{23}/\text{см}^3$. Следовательно, **когерентное рассеяние на кристалле происходит резко анизотропно и только с определенным \mathbf{q} .**

Таким образом, можно сказать, что сечение отлично от нуля при выполнении **уравнений**

$$\mathbf{q}\mathbf{a}_1 = 2\pi h; \quad \mathbf{q}\mathbf{a}_2 = 2\pi k; \quad \mathbf{q}\mathbf{a}_3 = 2\pi l$$

которые называются **условиями дифракции Лауэ.**

Решения уравнений Лауэ образуют решетку в так называемом **обратном пространстве векторов \mathbf{q}** . Они называются векторами обратной решетки. Для их нахождения удобно ввести базисные **векторы обратной решетки $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$** .

Рассмотрим $\mathbf{q} = h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + l\mathbf{b}_3$, где h, k и l – числа, входящие в уравнения Лауэ. Последние будут удовлетворены, если

$$1) \mathbf{b}_1\mathbf{a}_1 = 2\pi; \quad \mathbf{b}_2\mathbf{a}_1 = 0; \quad \mathbf{b}_3\mathbf{a}_1 = 0.$$

$$2) \mathbf{b}_1\mathbf{a}_2 = 0; \quad \mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 = 2\pi; \quad \mathbf{b}_3\mathbf{a}_2 = 0.$$

$$3) \mathbf{b}_1\mathbf{a}_3 = 0; \quad \mathbf{b}_2\mathbf{a}_3 = 0; \quad \mathbf{b}_3\mathbf{a}_3 = 2\pi.$$



$$\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3. \quad \mathbf{b}_2 \perp \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1. \quad \mathbf{b}_3 \perp \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2.$$

То есть,

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{(\mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3])}; \quad \mathbf{b}_2 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{(\mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3])}; \quad \mathbf{b}_3 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{(\mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3])}.$$

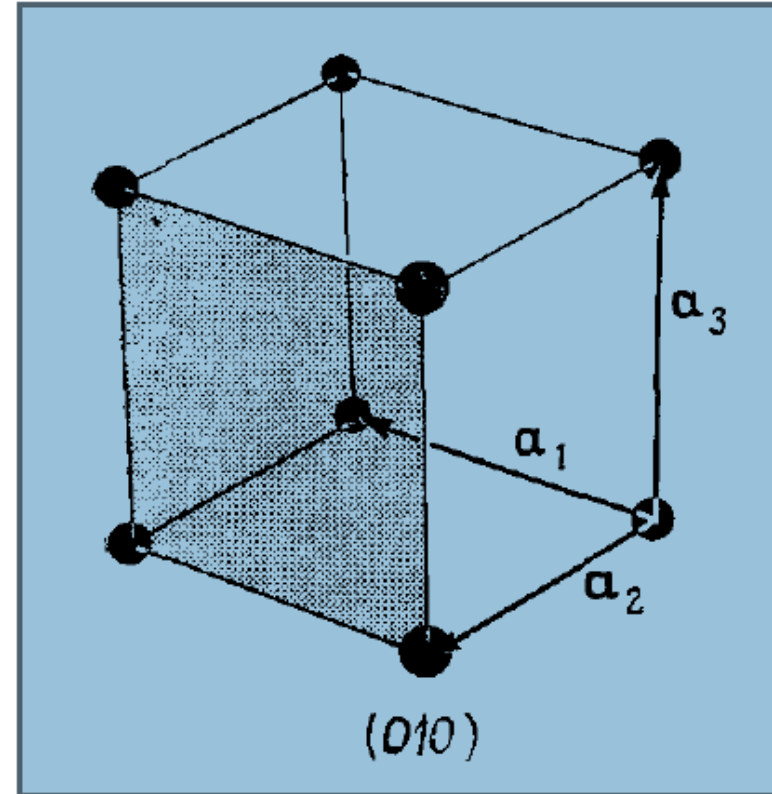
Выполнение условия дифракции означает равенство переданного импульса какому-либо из векторов обратной решетки:

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{g},$$

где $\mathbf{g} = h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + l\mathbf{b}_3$. Целые числа (hkl) называются индексами Миллера. Векторы обратной решетки впервые изобрел Гиббс.

Можно показать, что любой вектор обратной решетки \mathbf{g} перпендикулярен некоторой системе кристаллографических плоскостей, а его величина $g = |\mathbf{g}|$ характеризует межплоскостное расстояние $d = 2\pi/g$.

Действительно, например, величина $2\pi/|\mathbf{b}_2|$ представляет собой объем параллелепипеда, образованного векторами решетки $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, деленный на площадь его грани, построенной на векторах $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1$, а это есть не что иное, как высота параллелепипеда, т.е. *расстояние между двумя соседними кристаллографическими плоскостями, параллельными этой грани.*



$$\mathbf{b}_2 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{(\mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3])}$$

Таким образом, кристаллическая решетка может передавать (или принимать) лишь дискретный набор импульсов:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{g}$$

В силу сохранения энергии при упругом рассеянии, имеем

$$k^2 = |\mathbf{k}_0 + \mathbf{g}|^2 = k_0^2 \text{ или } 2\mathbf{k}_0\mathbf{g} + g^2 = 0.$$

Это условие дифракции Брэгга – Вульфа.

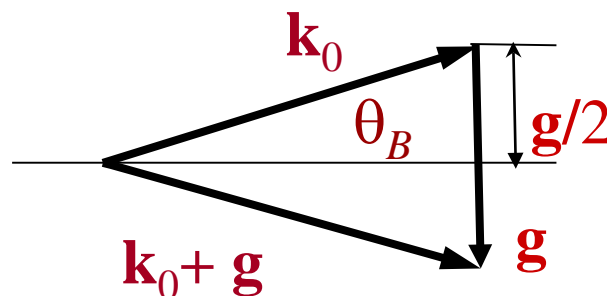
Его можно привести к обычному виду, введя угол θ между кристаллографической плоскостью и направлением вектора \mathbf{k}_0 : $\theta = \tilde{\theta} - \pi/2$, где $\tilde{\theta}$ — угол между векторами \mathbf{k}_0 и \mathbf{g} , а также используя соотношения

$$g = 2\pi/d \quad \text{и} \quad k = 2\pi/\lambda,$$

$$2d \sin \theta_B = \lambda.$$

Это — обычный вид известного условия Брэгга – Вульфа для угла $\theta = \theta_B$, называемого углом Брэгга, при котором происходит интенсивное рассеяние кристаллом

Геометрически:



$$g/2 = k_0 \sin \theta_B$$



$$\lambda = 2d \sin \theta_B$$

Однако **выражение сечения** рассеяния нейтрона кристаллом мы получили **в борновском приближении,**
т.е. при однократном рассеянии кристаллом.

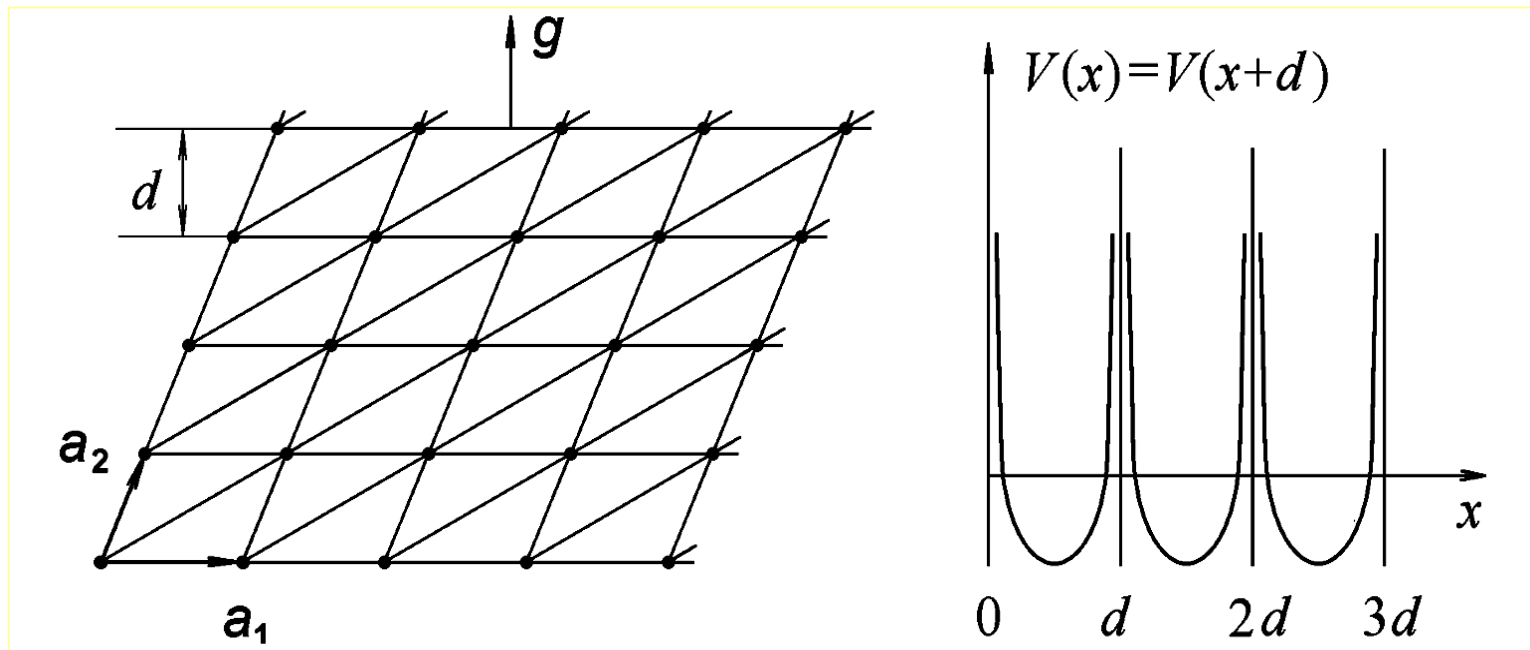
Это справедливо только для достаточно тонких кристаллов. При увеличении толщины кристалла отраженный пучок нейтронов отразится еще раз.

Дважды отраженный пучок будет интерферировать с первоначальным, причем деструктивно (в противофазе), уменьшая его интенсивность. **Как это описать?**

Разложение потенциала кристалла по векторам обратной решетки

Для этой цели удобно потенциал кристалла (сумму атомных потенциалов), обладающий свойством трансляционной инвариантности $V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i)$, представить в виде суммы потенциалов кристаллографических плоскостей. Это и есть разложение потенциала по векторам обратной решетки.

Каждую систему плоскостей можно задать вектором \mathbf{g} , который перпендикулярен плоскостям и равен по величине $|\mathbf{g}| = 2\pi/d$, где d – межплоскостное расстояние. Это можно считать определением векторов обратной решетки.



Периодический (в направлении \mathbf{g} , ось x) потенциал системы плоскостей можно разложить в ряд Фурье:

$$V_g(x) = \sum_n V_n \exp\left(\frac{2\pi i}{d} nx\right) = \sum_{g_n} V_{g_n} e^{ig_n x},$$

$g_n = 2\pi n/d$. Можно считать, что каждая гармоника описывает потенциал своей системы плоскостей \mathbf{g}_n (тогда дифракция n -го порядка – это дифракция первого порядка, но на системе плоскостей с межплоскостным расстоянием $d_n = d/n$).

Такое разложение можно провести по всем направлениям \mathbf{g} :

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} V_{\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\mathbf{g}} V_{\mathbf{g}} e^{i\mathbf{g}\mathbf{r}}.$$

Из вещественности $V(\mathbf{r}) = V^*(\mathbf{r})$ имеем

$$V_{\mathbf{g}} = V_{-\mathbf{g}}^* = v_{\mathbf{g}} e^{i\phi_{\mathbf{g}}} \quad \text{и} \quad V_{\mathbf{g}}^* = V_{-\mathbf{g}} = v_{\mathbf{g}} e^{-i\phi_{\mathbf{g}}},$$

Так что:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} V_{\mathbf{g}} e^{i\mathbf{g}\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{g} \geq 0} (V_{\mathbf{g}} e^{i\mathbf{g}\mathbf{r}} + V_{-\mathbf{g}} e^{-i\mathbf{g}\mathbf{r}}) = V_0 + \sum_{\mathbf{g} > 0} 2v_{\mathbf{g}} \cos(\mathbf{g}\mathbf{r} + \phi_{\mathbf{g}}).$$

Если кристалл **обладает центром симметрии**, то поместив в него начало координат, получаем $V(\mathbf{r}) = V(-\mathbf{r})$, и $V_{\mathbf{g}} = V_{\mathbf{g}}^*$, т.е. все $\phi_{\mathbf{g}} = 0$.

Заметим, что условия трансляционной инвариантности

$$V(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i) = \sum_g V_g e^{i\mathbf{g}\mathbf{r} + i\mathbf{a}_i\mathbf{g}} = V(\mathbf{r})$$

будут выполняться, если выполняются уравнения Лауэ $\mathbf{g}\mathbf{a}_i = 2\pi\mathbf{n}_i$.

Итак,

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} V_{\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{g'} V_{g'} e^{ig'\mathbf{r}}.$$

амплитуды гармоник потенциала вычисляются определяются через амплитуды (длины) рассеяния на атомах кристалла

$$\begin{aligned} V_g &= \int_{V=1} V(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{g}\mathbf{r}} d^3 r = \sum_n \int_{V=1} V_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) e^{-i\mathbf{g}\mathbf{r}} d^3 r = \\ &= \sum_n e^{i\mathbf{g}\mathbf{r}_n} \int V_n(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{g}\mathbf{r}'} d^3 r' = N \int V_{at}(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{g}\mathbf{r}'} d^3 r' = -\frac{2\pi\hbar^2}{m} N f_{at}(\mathbf{g}) = \\ &= mc^2 2\pi\hat{\lambda}_{cn} Na \approx 10^9 \cdot 6,3 \cdot 4 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{23} \cdot 10^{-12} \text{ эВ} \sim 3 \cdot 10^{-7} \text{ эВ}. \end{aligned}$$

$^{58}\text{Ni} - 3,6 \cdot 10^{-7} \text{ эВ} (8,3 \text{ м/с})$

Таким образом, опять получили, что **сечение рассеяния отлично от нуля**, когда **переданный импульс равен вектору обратной решетки $\mathbf{q} = \mathbf{g}$** , т.е., рассеяние происходит **только в брэгговских направлениях**, и **величина сечения $\sim N^2$**

Удобство такого представления потенциала кристалла в виде суммы синусоидальных потенциалов кристаллографических плоскостей состоит в том, что каждая синусоидальная гармоника потенциал передает (и принимает) фиксированный импульс (равный вектору обратной решетки), т.е. дает один рассеянный (или отраженный) луч.

Выделив один из рассеянных лучей, можно создать экспериментальную ситуацию, когда **существенна лишь одна система плоскостей**, и потенциал кристалла при этом с высокой степенью точности можно считать **синусоидальным**.

Исследуя сравнительные интенсивности большого числа отражений от кристалла, можно, в принципе, восстановить более или менее точный вид потенциала.

Итак, каждая гармоника потенциала передает фиксированный импульс

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{g},$$

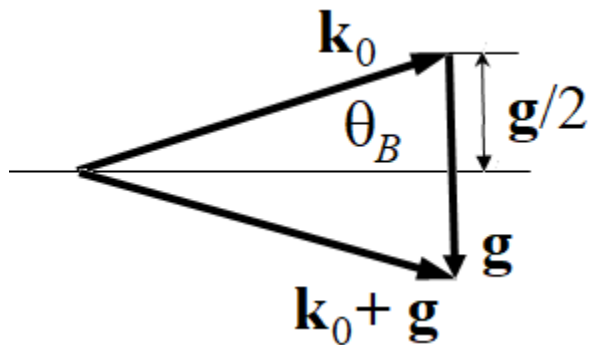
энергия при упругом рассеянии сохраняется, так что

$$k^2 = |\mathbf{k}_0 + \mathbf{g}|^2 = k_0^2.$$

Это есть не что иное, как условие дифракции Вульфа – Брэгга, которое можно записать как

$$2\mathbf{k}_0\mathbf{g} + g^2 = 0$$

или



$$\frac{g}{2} = k_0 \sin \theta_B$$



$$\lambda = 2d \sin \theta_B.$$

Параметр отклонения от условия Брэгга:

$$\Delta_g = \frac{|\mathbf{k}_0 + \mathbf{g}|^2 - k_0^2}{2}$$

характеризует отклонение направления или энергии падающего на кристалл пучка нейтронов от точных брэгговских значений

Пусть на кристалл падет пучок нейтронов с заданной энергией и направлением, далекими от брэгговских. Волновая функция нейтрона

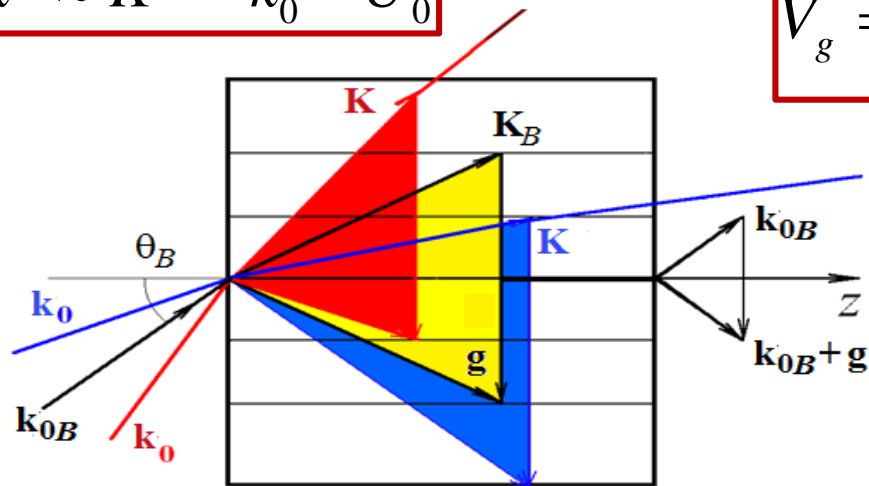
$$\psi_i = e^{ik_0 r}, \quad E = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$$

Тогда, зная потенциал кристалла, можно описать распространение нейтрона внутри кристалла по теории возмущений:

$$\psi = e^{ikr} + \sum_g \frac{V_g}{E_k - E_{k_g}} \cdot e^{ik_g r} \equiv e^{ikr} \left[1 + \sum_g \frac{U_g}{2\Delta_g} e^{igr} \right], \quad E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad E_{k_g} = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k} + \mathbf{g}|^2}{2m}.$$

$$k^2 \approx K^2 = k_0^2 - U_0$$

$$V_g = \frac{\hbar^2 U_g}{2m}$$



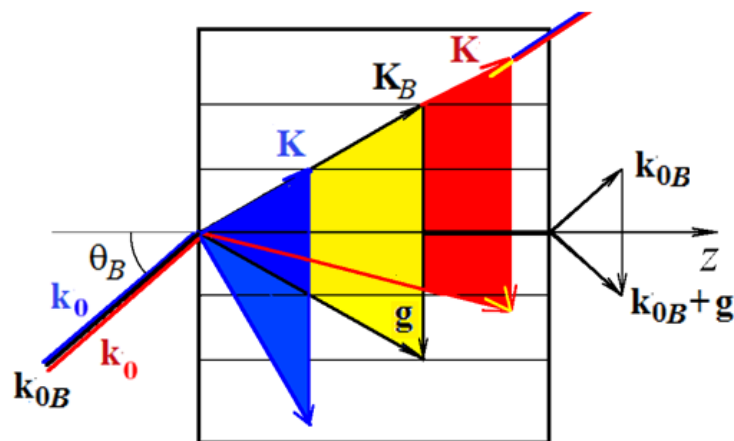
$$|\mathbf{K} + \mathbf{g}| < |\mathbf{K}|$$

$$|\mathbf{K}_B + \mathbf{g}| = |\mathbf{K}_B|$$

$$|\mathbf{K} + \mathbf{g}| > |\mathbf{K}|$$

Энергия фиксирована.

Разные направления.



$$|\mathbf{K} + \mathbf{g}| > |\mathbf{K}|$$

$$|\mathbf{K}_B + \mathbf{g}| = |\mathbf{K}_B|$$

$$|\mathbf{K} + \mathbf{g}| > |\mathbf{K}|$$

Направление фиксировано.¹⁸

Разные энергии.

При приближении к брэгговскому условию (изменяя направление или длину волны падающего нейтрона) существенной становится только одна система плоскостей, т.е.

$$\psi = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \frac{V_g}{E_k - E_{k_g}} \cdot e^{i\mathbf{k}_g\mathbf{r}} \equiv e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \left[1 + \frac{V_g}{2\Delta_g^\varepsilon} e^{i\mathbf{g}\mathbf{r}} \right] \equiv e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \left[1 + \frac{U_g}{2\Delta_g} e^{i\mathbf{g}\mathbf{r}} \right],$$

Нейтроны в зависимости от знака Δ_g начинают концентрироваться на максимумах ядерного потенциала плоскостей, либо на его минимумах:

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 = 1 + \frac{V_g}{\Delta_g^\varepsilon} \cos \mathbf{g}\mathbf{r},$$

$$V(\mathbf{r}) = V_0 + 2V_g \cos \mathbf{g}\mathbf{r}.$$

Масштаб происходящей перестройки в.ф. определяется отличием энергии нейтрона ($\sim 0,01$ эВ) от брэгговской на величину порядка $V_g \sim 10^{-7}$ эВ, т.е. дифракционные явления происходят в области изменения энергии или длин волн $\Delta\lambda_B/\lambda_B \sim 10^{-5}$

При приближении к условию Брэгга ($\Delta_g \rightarrow 0$) внутри кристалла амплитуда отраженной волны может сравняться с амплитудой прямой, поэтому задачу для этих двух волн (двух уровневую систему) следует решать точно, т.е. найти решения с гамильтонианом

$$H = H_0 + V_0 + V_g e^{i\mathbf{g}\mathbf{r}} + V_{-g} e^{-i\mathbf{g}\mathbf{r}}.$$

Ищем решение в виде

$$\psi = a_0 |\mathbf{k}\rangle + a_g |\mathbf{k}_g\rangle,$$

где

$$H_0 |\mathbf{k}\rangle = E_k |\mathbf{k}\rangle; \quad H_0 |\mathbf{k}_g\rangle = E_{k_g} |\mathbf{k}_g\rangle. \quad E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad E_{k_g} = \frac{\hbar^2 k_g^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (\mathbf{k} + \mathbf{g})^2}{2m}.$$

Тогда уравнение Шредингера $H\psi = E\psi$ переходит в

$$\begin{pmatrix} E_k + V_0 & V_{-g} \\ V_g & E_{k_g} + V_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_g \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} a_0 \\ a_g \end{pmatrix}.$$

Условие разрешимости этой линейной однородной системы уравнений (секулярное уравнение) есть:

$$(E_k - \varepsilon)(E_{k_g} - \varepsilon) - V_g V_{-g} = 0.$$

Здесь $\varepsilon = E - V_0$. Поскольку полная энергия E нейтрона в кристалле равна энергии падающего нейтрона

$$E = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m},$$

то уравнение определяет значения волновых векторов \mathbf{k} , допустимые в кристалле. Деля его на $\hbar^2 / 2m$, и вводя величину

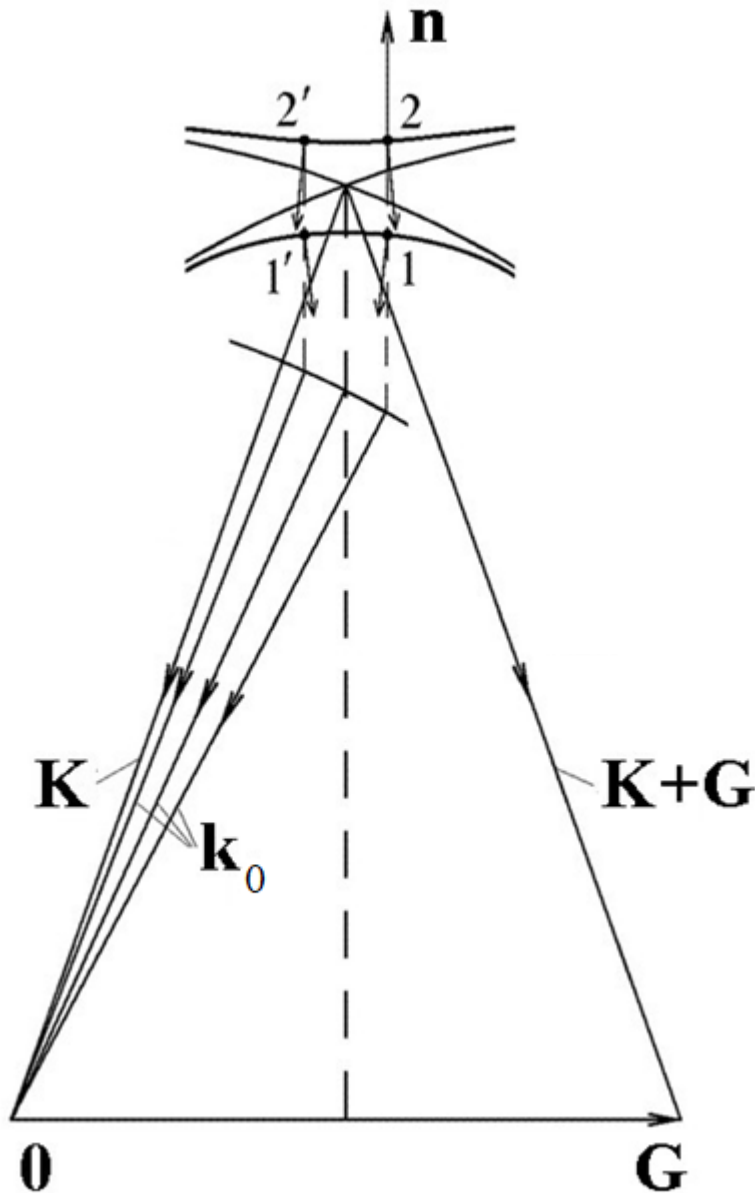
$$K^2 = 2m\varepsilon / \hbar^2 = k_0^2 - U_0,$$

которая есть волновой вектор нейтрона в кристалле с учетом среднего потенциала (среднего коэффициента преломления), получим:

$$(k^2 - K^2) \left[(\mathbf{k} + \mathbf{g})^2 - K^2 \right] = |U_g|^2.$$

Это уравнение описывает так называемую дисперсионную (изоэнергетическую) поверхность в пространстве волновых векторов.

Дисперсионная (изоэнергетическая) поверхность нейтрона в кристалле



Ее уравнение можно переписать в виде:

$$\left(K^2 - k^2 \right) \left[K^2 - |\mathbf{k} + \mathbf{G}|^2 \right] = |U_G|^2,$$

где $K^2 \equiv n^2 k_0^2 = k_0^2 - U_0$

– волновой вектор падающего на кристалл нейтрона с учетом среднего потенциала.

Используя определение параметра Δ_G

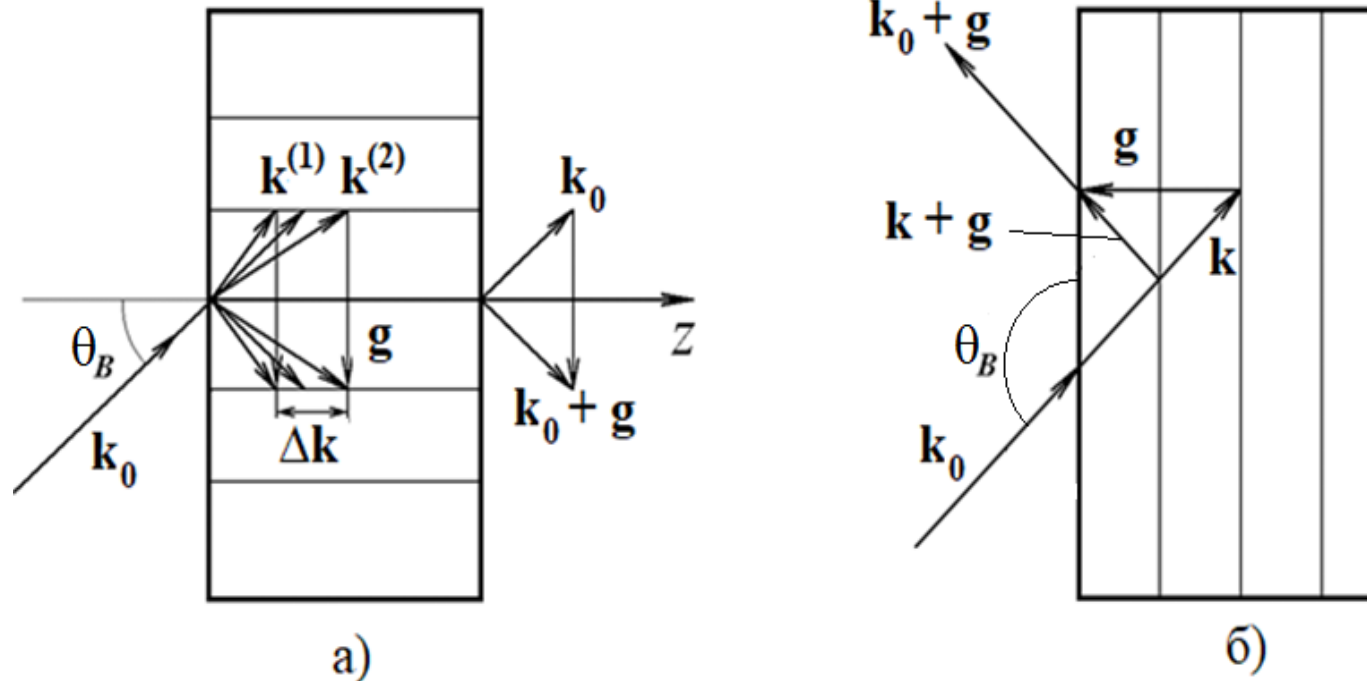
$$|\mathbf{k} + \mathbf{G}|^2 = k^2 + 2\Delta_G, \text{ имеем}$$

$$\left(K^2 - k^2 \right)^2 + 2\Delta_g \left(K^2 - k^2 \right) - |U_g|^2 = 0,$$

и решение:

$$k^{(1,2)2} = K^2 + \Delta_g \mp \sqrt{\Delta_g^2 + |U_g|^2}.$$

Различают **дифракцию на прохождение (по Лауэ)** и **на отражение (по Брэггу)**. Симметричные схемы дифракции по Лауэ (когда граница перпендикулярна плоскостям) и по Брэггу (когда граница кристалла параллельна отражающим плоскостям) изображены на рис. *а)* и *б)*



При дифракции по Лауэ параметры отклонения от условия Брэгга одинаковы для всех волновых векторов \mathbf{k}_0 , $\mathbf{k}^{(1)}$, $\mathbf{k}^{(2)}$ и \mathbf{K} , поскольку на границе кристалла изменяется только нормальная к границе компонента импульса (волнового вектора) нейтрона и все эти вектора отличаются только нормальными компонентами.

При точном выполнении условия Брэгга для падающей волны

$$\Delta_g = 0, \text{ т.е. } k_0^2 = |\mathbf{k}_0 + \mathbf{g}|^2$$

будем иметь

$$k^{(1,2)2} = K^2 \mp |U_g|.$$

Двум значениям волнового вектора соответствуют два набора амплитуд a_0 и a_g , которые определяют два типа нейтронных волн (собственных состояний нейтрона в кристалле)

$$\frac{a_g^{(1,2)}}{a_0^{(1,2)}} = -\frac{k^{(1,2)2} - K^2}{U_g} = \pm \frac{|U_g|}{U_g} = \pm 1.$$

т.е.

$$\begin{aligned}\psi^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\mathbf{k}^{(1)}\mathbf{r}} + e^{i(\mathbf{k}^{(1)}+\mathbf{g})\mathbf{r}} \right] = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\mathbf{g}\mathbf{r}}{2}\right) \exp\left[i\left(\mathbf{k}^{(1)} + \frac{\mathbf{g}}{2}\right)\mathbf{r}\right], \\ \psi^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\mathbf{k}^{(2)}\mathbf{r}} - e^{i(\mathbf{k}^{(2)}+\mathbf{g})\mathbf{r}} \right] = i\sqrt{2} \sin\left(\frac{\mathbf{g}\mathbf{r}}{2}\right) \exp\left[i\left(\mathbf{k}^{(2)} + \frac{\mathbf{g}}{2}\right)\mathbf{r}\right].\end{aligned}$$

Это хорошо известное явление: при пересечении двух уровней их волновые функции полностью перемешиваются, образуя симметричную и антисимметричную комбинации, а сами уровни отталкиваются.

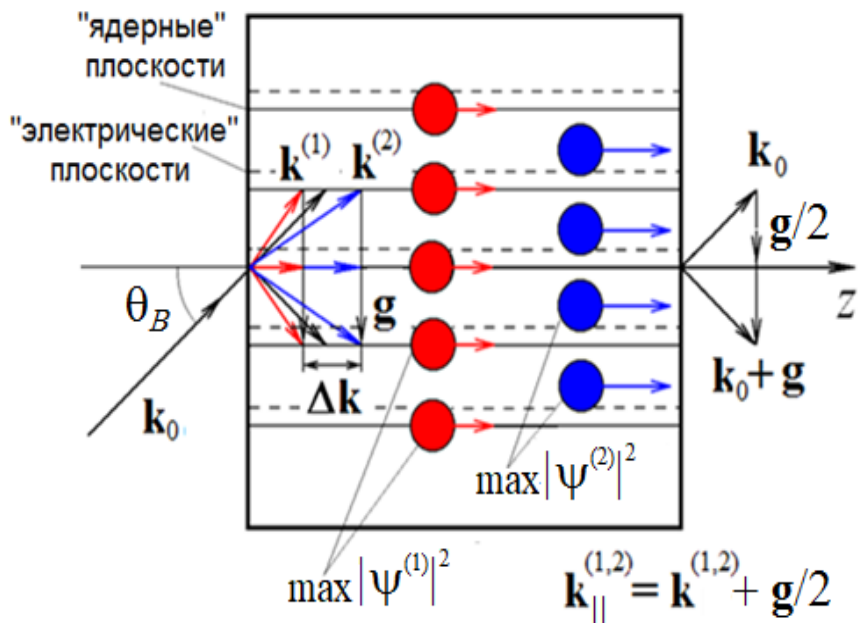
Распространение происходит вдоль кристаллографических плоскостей с волновыми векторами

$$\mathbf{k}_{\parallel}^{(1,2)} = \mathbf{k}^{(1,2)} + \mathbf{g} / 2,$$

причем нейтроны в состоянии $\psi^{(1)}$ сконцентрированы преимущественно на ядерных плоскостях, а в состояниях $\psi^{(2)}$ – между ними:

$$|\psi^{(1)}|^2 = 2 \cos^2(\mathbf{g}\mathbf{r} / 2) = 1 + \cos(\mathbf{g}\mathbf{r}),$$

$$|\psi^{(2)}|^2 = 2 \sin^2(\mathbf{g}\mathbf{r} / 2) = 1 - \cos(\mathbf{g}\mathbf{r}).$$



Таким образом, нейтроны в состояниях (1) и (2) движутся в разных потенциалах и имеют разные кинетические энергии (т.е. разные величины волновых векторов), что и отражает уравнение дисперсионной поверхности

Скорости их также слегка различны:

$$v_{\parallel}^{(1)} < v_{\parallel}^{(2)}$$

Сама же скорость:

$$v_{\parallel}^{(1)} \approx v_{\parallel}^{(2)} \approx v_{0\parallel} = v_0 \cos \theta_B \approx v_0 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_B \right) \ll v_0 \text{ при } \theta_B \approx \frac{\pi}{2}$$

Разница волновых векторов в кристалле при точном выполнении условия Брэгга $\mathbf{k}_0^2 = |\mathbf{k}_0 + \mathbf{G}|^2$ определяется из уравнения дисперсионной поверхности:

$$\mathbf{k}^{(1,2)2} = K^2 \mp |U_G| \quad \longrightarrow \quad \mathbf{k}^{(2)2} - \mathbf{k}^{(1)2} = 2|U_G|.$$

и

$$\mathbf{k}^{(2)2} - \mathbf{k}^{(1)2} = 2\mathbf{k}_0 \Delta \mathbf{k} = 2k_0 \Delta k \cos \theta = 2|U_g|,$$

$$\Delta k = \frac{|U_g|}{k_0 \cos \theta} = \frac{2|V_g|}{\hbar v \cos \theta},$$

т.е. выражение для изменения величины вектора \mathbf{k}_0 содержит **угол** между **направлением самого вектора** и **направлением его изменения** (т.е. **нормали к границе**). В симметричной схеме дифракции по Лауэ этот угол совпадает с углом Брэгга. Разность фаз волн (1) и (2) при прохождении кристалла толщиной L

$$\Delta \phi = \Delta k L = \frac{|U_g| L}{k_0 \cos \theta} = \frac{2|V_g|}{\hbar} \frac{L}{v \cos \theta}.$$

При падении нейтронов с заданной энергией и импульсом на кристалл в последнем могут возбуждаться волны обоих типов:

$$\Psi = c_1 \Psi^{(1)} + c_2 \Psi^{(2)}$$

Амплитуды возбуждения c_1 и c_2 определяются граничными условиями на входной грани кристалла. В частности, в симметричной схеме дифракции по Лауэ при точном выполнении условия Брэгга $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$, и

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2} \left(e^{i\mathbf{k}^{(1)}\mathbf{r}} + e^{i\mathbf{k}^{(2)}\mathbf{r}} + e^{i(\mathbf{k}^{(1)}+\mathbf{g})\mathbf{r}} - e^{i(\mathbf{k}^{(2)}+\mathbf{g})\mathbf{r}} \right) = \\ &= \cos\left(\frac{\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}}{2}\right) e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}} + i \sin\left(\frac{\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}}{2}\right) e^{i(\mathbf{K}+\mathbf{g})\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{K} = (\mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)})/2$, ось z направлена параллельно кристаллографическим плоскостям (перпендикулярно границе кристалла) и учтено, что вектор $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}^{(2)} - \mathbf{k}^{(1)}$ направлен по оси z , поскольку на границе кристалла может передаваться импульс, только перпендикулярный этой границе.

Биения волн разного типа с разными волновыми векторами приводят к **периодической по глубине кристалла "перекачке" интенсивности нейтронов из прямого пучка в отраженный и наоборот**. Это явление носит название **"Pendellosung"** — маятниковый эффект (букв. с нем. «маятниковое решение»)

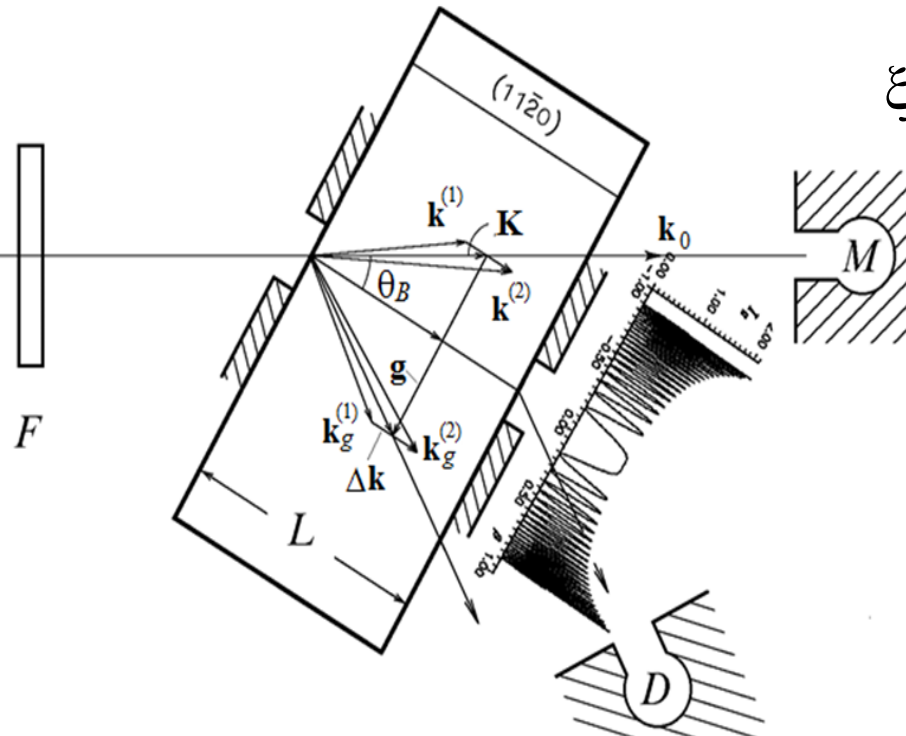
Таким образом, имеем осцилляции интенсивностей прямого и отраженного нейтронных пучков, прошедших через кристалл толщиной L , которые определяются маятниковой фазой $\phi = \Delta k L$:

$$I_0 = \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos \phi), \quad I_g = \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos \phi).$$

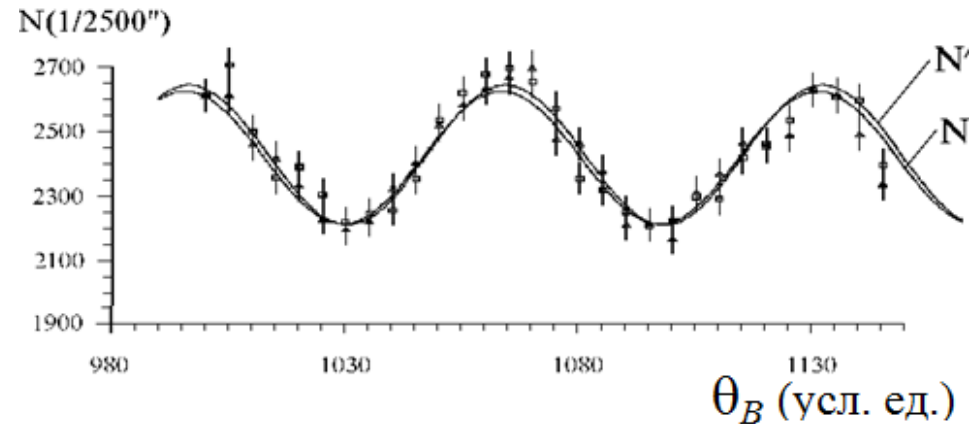
$$\phi = \Delta k L = \left| \mathbf{k}^{(2)} - \mathbf{k}^{(1)} \right| L = \frac{2\pi L}{\xi_g} = \frac{2|V_g|}{\hbar} \frac{L}{v_{\parallel}} = \frac{2|V_g|}{\hbar} \frac{L \operatorname{tg} \theta_B}{v_{\perp}},$$

$$v_{\perp} \equiv \frac{\hbar g}{2m_n}.$$

ξ_g – пространственный период биений в кристалле – **экстинкционная длина**.



$$\xi_g = \frac{\pi \hbar v_{\perp}}{V_g \operatorname{tg} \theta_B} = \frac{\hbar^2 g^2}{V_g 2m_n} \frac{\pi}{g \operatorname{tg} \theta_B} = \frac{E_{n\perp}}{V_g} \frac{d}{2 \operatorname{tg} \theta_B}$$



Разная симметрия волн в кристалле приводит к еще одному эффекту, который был открыт **Г. Борманом** в 1941 г. в **дифракции рентгеновских лучей** и был объяснен Лауэ лишь в 1949. Это – эффект **аномальной прозрачности** кристалла для волн, проходящих через него в условиях дифракции.

Эффект обусловлен тем, что волна (1) сконцентрированная на плоскостях (из атомов), поглощается сильнее волны (2), сконцентрированной между ними.

Поглощение нейтронов в кристалле можно описать добавкой мнимой части к потенциалу $(-iV')$, $V'(\mathbf{r})$ вещественна и положительна. Она также раскладывается на гармоники, в результате при точном выполнении условия Брэгга получается

$$\mathbf{k}^{(1,2)2} = k_0^2 - U_0 + iU'_0 \mp (U_G - iU'_G) = \mathbf{k}_0^2 - (U_0 \pm U_G) + i(U'_0 \pm U'_G)$$

$$\Delta k^{(1,2)} = \frac{-(U_0 \pm U_G) + i(U'_0 \pm U'_G)}{2k_0 \cos \theta_B} \rightarrow \left| a_0^{(1,2)} \right|^2 = \left| a_G^{(1,2)} \right|^2 = e^{-\frac{(U_0 \pm U_G)L}{k_0 \cos \theta_B}} \equiv e^{-\frac{\mu_0(1 \pm \varepsilon_G)L}{\cos \theta_B}}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{L_a} = \frac{U'_0}{k_0} = k_0 \frac{2mV'_0}{\hbar^2 k_0^2}, \quad \varepsilon_G = \frac{V'_g}{V'_0}.$$

Для нейтронов, в силу малых размеров ядра, все гармоники практически одинаковы, поэтому ε_G может быть близко к 1.

Эффект аномального прохождения нейтрона через кристалл в условиях дифракции.

Были измерены интенсивности прошедших через кристалл нейтронов в зависимости от угла Брэгга при дифракции по Лауэ.

Для плоскости (220) кристалла кремния ($130 \times 130 \times 218 \text{ мм}^3$) измеренная зависимость соответствует $\varepsilon_g \sim 0,9$



Длина поглощения одной из блоховских волн **> 300 см.**
Среднее поглощение в кристалле **40 см**

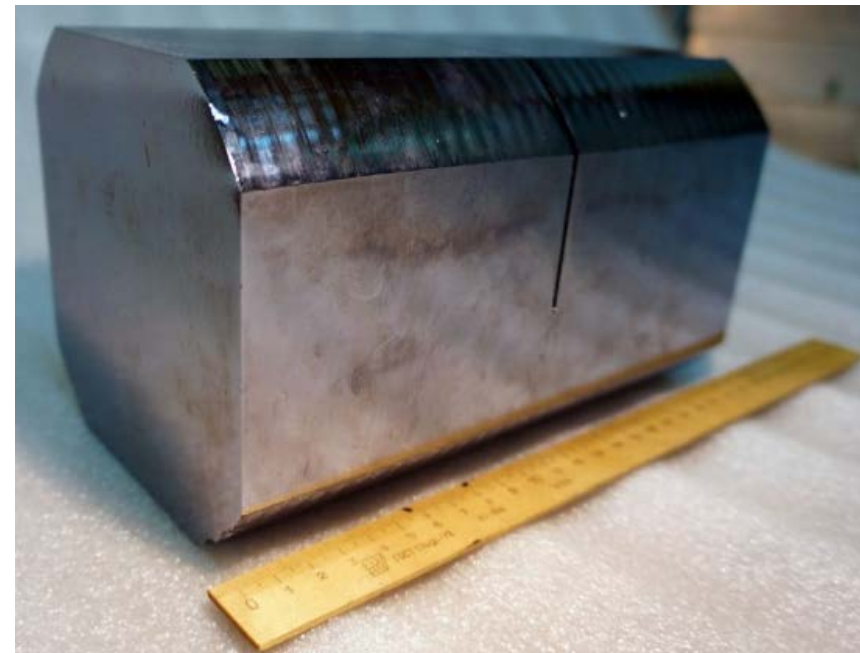
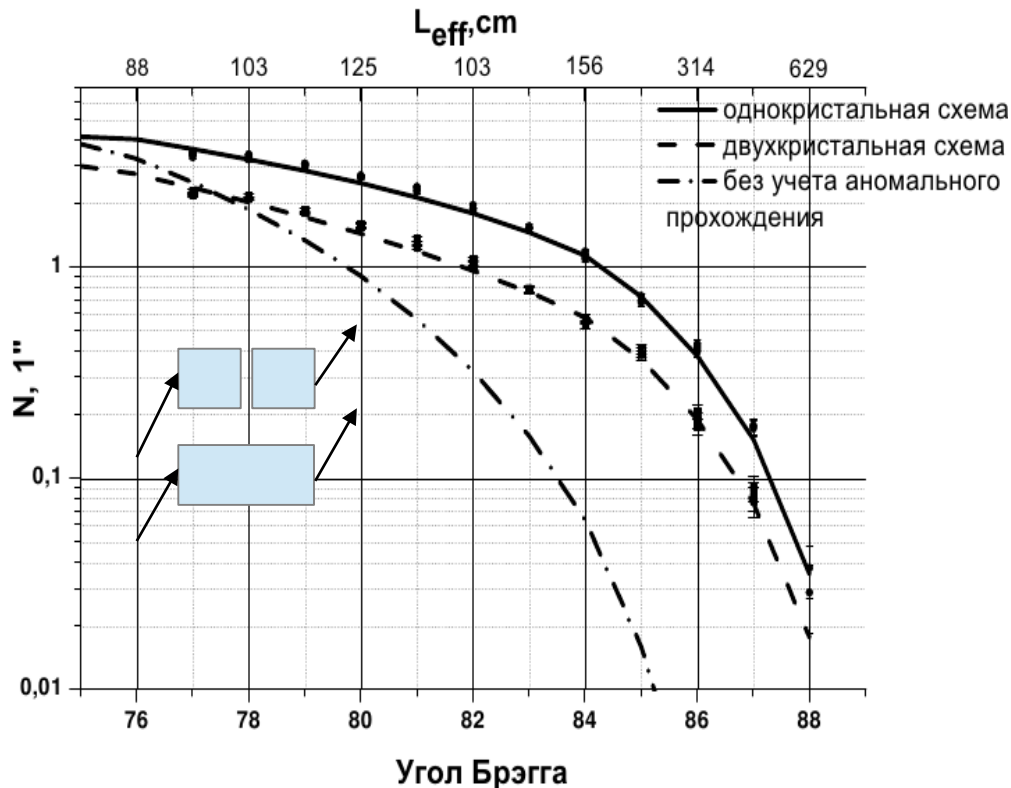
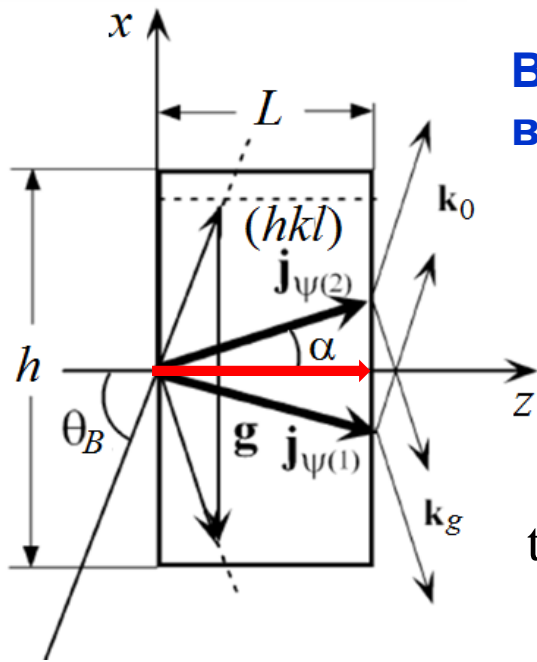


Фото рабочего кристалла
30

Дифракция по Лауэ. Общий случай

Волновые функции нейтрона, отвечающие двум ветвям дисперсионной поверхности можно записать



$$\psi^{(1)}(\mathbf{r}) = \cos \gamma e^{i\mathbf{k}^{(1)}\mathbf{r}} + \sin \gamma e^{i(\mathbf{k}^{(1)}+\mathbf{g})\mathbf{r}},$$

$$\psi^{(2)}(\mathbf{r}) = -\sin \gamma e^{i\mathbf{k}^{(2)}\mathbf{r}} + \cos \gamma e^{i(\mathbf{k}^{(2)}+\mathbf{g})\mathbf{r}}.$$

Здесь

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{U_g}{\Delta_g} \equiv \frac{1}{w_g}$$

и

$$w_g = \frac{\Delta_g}{U_g} = \frac{(k_g^2 - k^2)}{2U_g} = \frac{(2\mathbf{k}\mathbf{g} + g^2)}{2U_g}$$

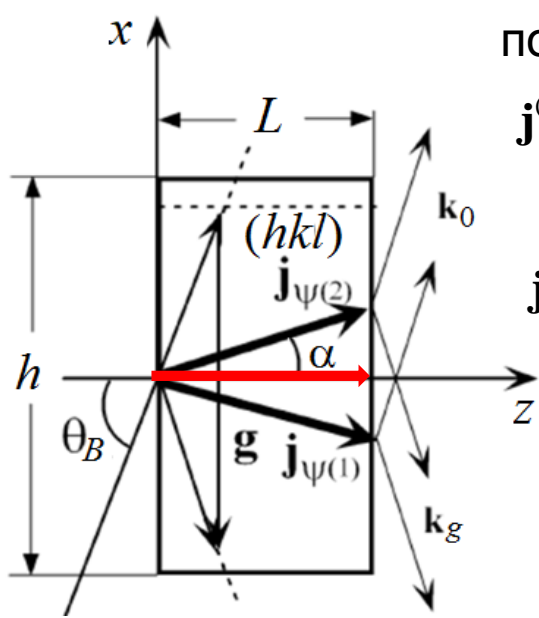
$$\cos^2 \gamma = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{w_g}{\sqrt{1+w_g^2}} \right]$$

$$\sin^2 \gamma = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{w_g}{\sqrt{1+w_g^2}} \right]$$

При точном выполнении условия Брэгга волны (1) и (2) движутся параллельно плоскостям, т.е. пакеты всегда перекрываются и наблюдать маятниковую картину можно, в принципе, при любой толщине кристалла. При отклонении от условия Брэгга плотности токов нейтронов в волнах (1) и (2) начинают расходиться, так что при некоторой толщине кристалла и при конечной ширине пакетов они перестают перекрываться.

Действительно, усредняя по быстрым осцилляциям с периодом d величину

$$\mathbf{j}^{(1,2)} = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^{(1,2)*} \nabla \psi^{(1,2)} - \psi^{(1,2)} \nabla \psi^{(1,2)*} \right) = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \psi^{(1,2)*} \nabla \psi^{(1,2)},$$



получаем

$$\mathbf{j}^{(1)} = \frac{\hbar}{m} \left[\mathbf{k}^{(1)} \cos^2 \gamma + (\mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{g}) \sin^2 \gamma \right] = \frac{\hbar}{m} \left[\left(\mathbf{k}^{(1)} + \frac{\mathbf{g}}{2} \right) - \frac{\mathbf{g}}{2} \frac{w_g}{\sqrt{1+w_g^2}} \right],$$

$$\mathbf{j}^{(2)} = \frac{\hbar}{m} \left[\mathbf{k}^{(2)} \sin^2 \gamma + (\mathbf{k}^{(2)} + \mathbf{g}) \cos^2 \gamma \right] = \frac{\hbar}{m} \left[\left(\mathbf{k}^{(2)} + \frac{\mathbf{g}}{2} \right) + \frac{\mathbf{g}}{2} \frac{w_g}{\sqrt{1+w_g^2}} \right].$$

Траектории Като – это линии, касательные к которым совпадают с направлениями плотности тока в каждой точке. В данном случае это прямые линии. При отклонении от точного условия Брэгга они расходятся в разные стороны.

С другой стороны, если падающая волна – ограниченный, например, входной щелью, волновой пакет, то траектории Като будут описывать движение этого пакета если его размер существенно больше экстинкционной длины ($\Delta x \gg \xi_g \operatorname{tg} \theta_B$). Углы α наклона траекторий Като определяются

$$\operatorname{tg} \alpha = \mp \frac{g}{2k_{\parallel}^{(1,2)}} \frac{w_g}{\sqrt{1+w_g^2}} = \mp \operatorname{tg} \theta_B \frac{w_g}{\sqrt{1+w_g^2}}. \quad \text{Параметр } \frac{L \operatorname{tg} \alpha}{L \operatorname{tg} \theta_B} \equiv \beta = \frac{w_g}{\sqrt{1+w_g^2}}$$

также характеризует отклонение от условия Брэгга и изменяется от -1 до $+1$. Его смысл – отношение координаты $x = L \operatorname{tg} \alpha$ точки выхода траектории Като из кристалла к половине длины основания $H/2 = L \operatorname{tg} \theta_B$ так называемого треугольника (или палатки) Бормана.

Заметим, что в симметричной схеме Лауэ (граница кристалла перпендикулярна отражающим плоскостям) волны $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ возбуждаются в кристалле с амплитудами $\cos \gamma$ и $-\sin \gamma$, соответственно. Поэтому при малых отклонениях от условия Брэгга, т.е. при $w_g \ll 1$, $\cos^2 \gamma = \frac{1}{2}(1 + w_g)$, $\sin^2 \gamma = \frac{1}{2}(1 - w_g)$,

оба состояния возбуждаются практически с одинаковой вероятностью ($\cos^2 \gamma \approx \sin^2 \gamma$).

Однако направления токов (в особенности при углах Брэгга θ_B , близких к прямому, т.е. когда $k_{\parallel} \ll g/2$, $\text{tg } \theta_B = g/2k_{\parallel} \gg 1$) могут измениться весьма существенно, действительно в этом случае:

$$\mathbf{j}^{(1,2)} \approx \frac{\hbar}{m} \left[\mathbf{k}_{\parallel}^{(1,2)} \mp \frac{\mathbf{g}}{2} w_g \right],$$

и наклон траектории Като определится как

$$\frac{dx}{dz} = \text{tg } \alpha \approx \mp w_g \text{tg } \theta_B \quad \text{и} \quad \beta = \frac{L \text{tg } \alpha}{L \text{tg } \theta_B} \approx w_g.$$

Таким образом, **при углах дифракции, близких к 90°**, даже **малое изменение** параметра w_g приведет к существенному изменению направления тока нейтронов, причем в противоположных направлениях для разных типов волн.

Параметр w_g **под действием внешней силы постоянно меняется** – траектории **искривятся**, причем **будут расходиться в разные стороны**.

Изменение наклона кривой $x(z)$, описывающей траекторию Като, определяется выражением

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \mp \operatorname{tg} \theta_B \frac{dw_g}{dz} = \mp \frac{c_0}{v_{\parallel}} \frac{dw_g}{dt} \quad (c_0 \equiv \operatorname{tg} \theta_B).$$

Рассмотрим действие постоянной внешней силы \mathbf{F} , действующей на нейтрон в совершенном недеформированном кристалле. К изменению параметра отклонения w_g приводит только компонента силы \mathbf{F} вдоль вектора \mathbf{g} (ось x), компоненты силы, параллельные плоскостям (вдоль осей y и z) его не изменяют. В этом случае

$$\frac{dw_g}{dt} = - \frac{d(2\mathbf{k}\mathbf{g} + g^2)}{dt} \frac{1}{2U_g} = - \frac{gdk_x}{U_g dt} = - \frac{2m_n v_{\perp}}{\hbar^2 U_g} F_x = - \frac{v_{\perp}}{V_g} F_x,$$

где

$$v_{\perp} \equiv \frac{\hbar g}{2m_n} \quad (v_{\perp} \approx v_{x0}, v_{\parallel} = v_z), \quad \frac{dk_x}{dt} \equiv \frac{m_n}{\hbar} \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x}{\hbar},$$

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \pm \frac{c_0}{v_{\parallel}} \frac{v_{\perp}}{V_g} F_x = \pm c_0^2 \frac{F_x}{V_g} \equiv \pm c_0^2 \frac{E_n}{V_g} \frac{F_{\perp}}{E_n}. \quad \text{При } \theta_B \sim \pi/2 \quad E_n \approx \frac{\hbar^2 g^2}{8m}$$

Сравним это уравнение с классическим уравнением траектории движения нейтрона в пустоте под действием внешней силы, направленной перпендикулярно его скорости. Оно определяется уравнением Ньютона:

$$m_n v^2 \frac{d^2 x}{dz^2} = F_{\perp} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{F_{\perp}}{2E_n}.$$

Видим, что действие силы на дифрагирующий в кристалле нейтрон увеличивается многократно по сравнению с «пустым» пространством, причем коэффициент такого дифракционного усиления K_D равен

$$K_D = \frac{2c_0^2 E_n}{V_g}.$$

Например, для системы плоскостей (220) кристалла кремния с межплоскостным расстоянием $d = 1,92 \text{ \AA}$, которая часто используется в дифракционных экспериментах с нейтронами ($E_n = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$, $V_g = 5,2 \cdot 10^{-8} \text{ эВ}$) значение дифракционного коэффициента усиления составляет:

$$K_{D(\text{Si})}^{220} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ tg}^2 \theta_B.$$

Уже при угле Брэгга $\theta_B \sim 82^\circ$ ($c_0 = 7,1$) величина $K_D \sim 10^7$.

Двухкристальная схема с прямой коллимацией пучков. Наблюдение дифракционного усиления эффекта Штерна–Герлаха

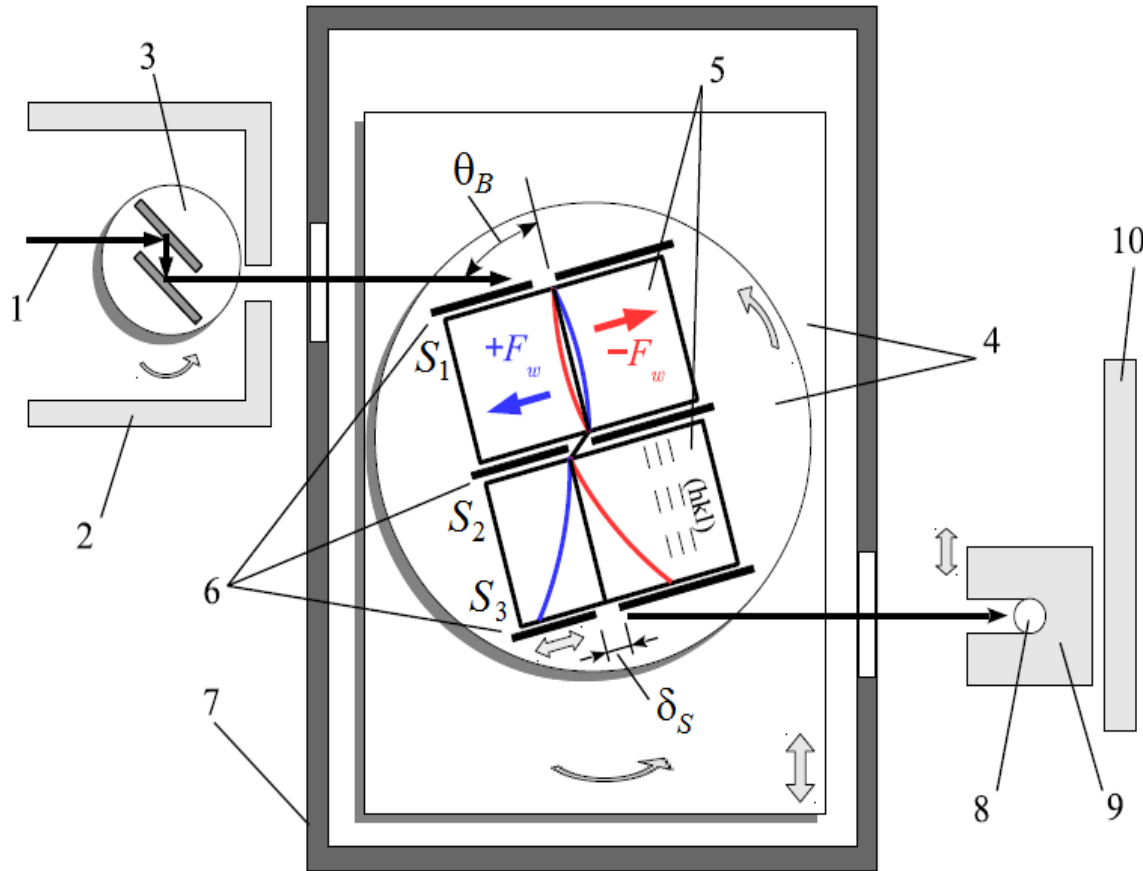


Схема установки (вид сверху): 1 – пучок нейтронов (PF1B, ILL); 2 – бетонная защита (каземат); 3 – двух-кристальный монокроматор (пирографит, $d_{PG}=3,35 \text{ \AA}$, $\lambda=(3,5-3,9) \text{ \AA}$); 4 – механизм перемещения кристалла с поворотным столиком; 5 – рабочий монокристалл кремния; 6 – коллимирующие (S_1, S_2) и сканирующая (S_3) щели; 7 – термостат; 8 – детектор; 9 – защита детектора; 10 – поглотитель пучка

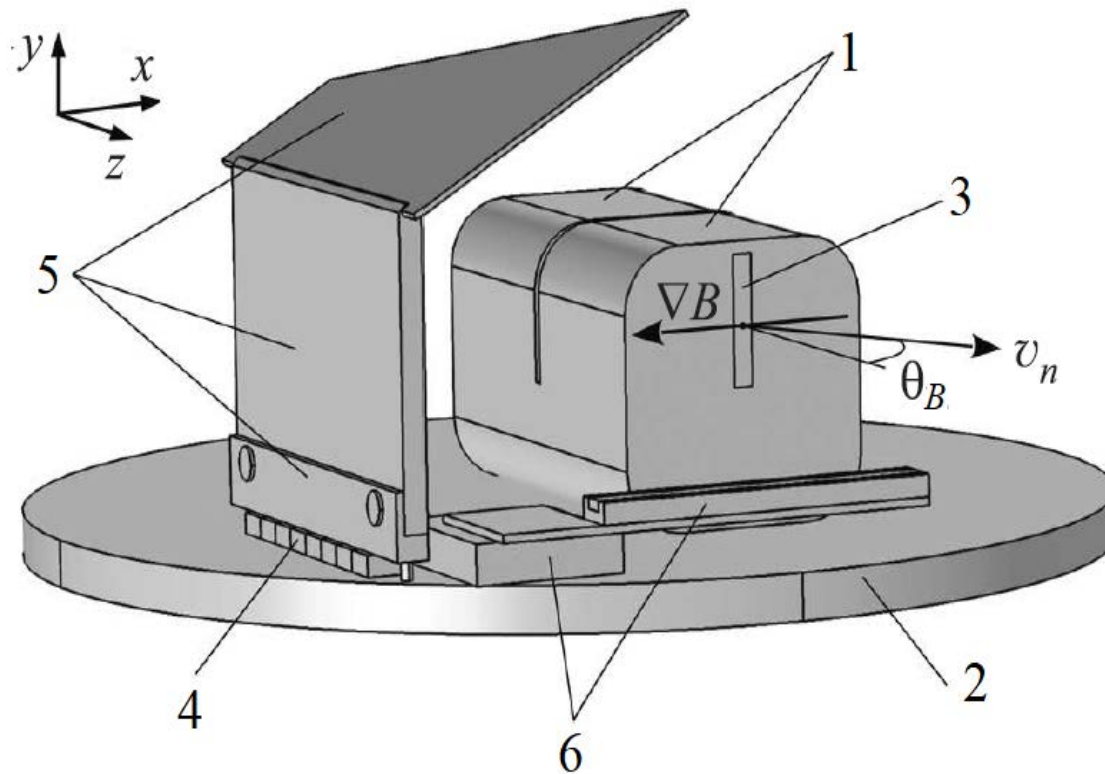
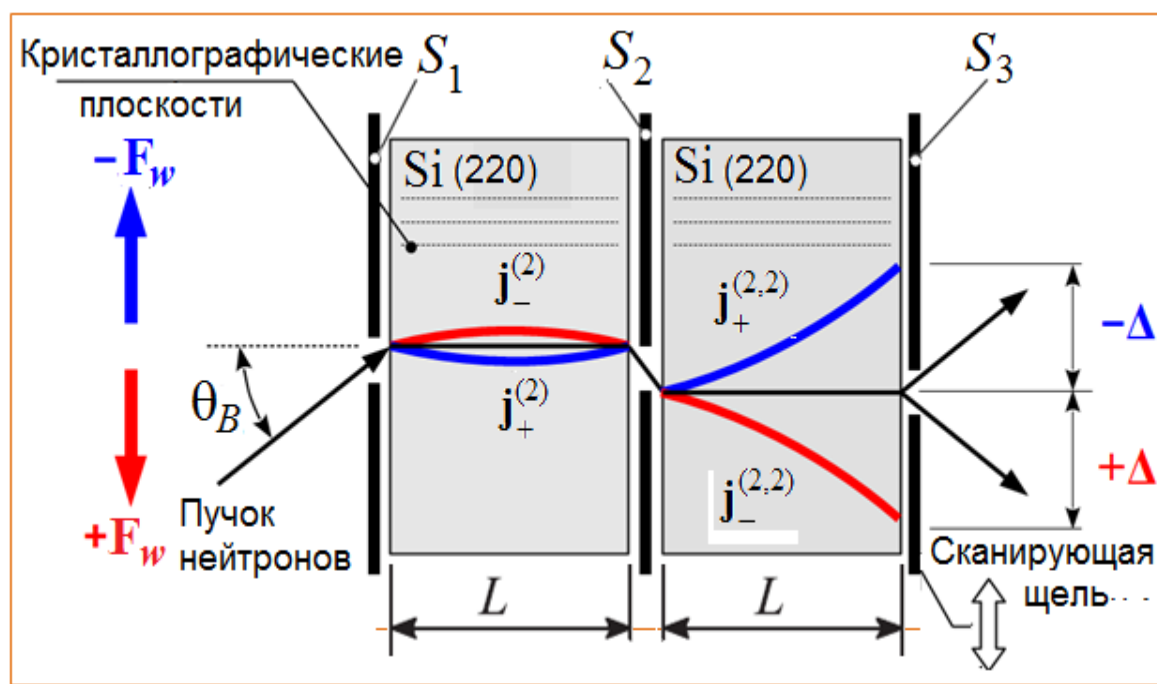


Схема расположения кристалла и магнитопровода: 1 – монокристалл кремния; 2 – поворотный столик (часть магнитопровода); 3 – область пучка на выходе из кристалла; 4 – постоянные магниты; 5 – магнитопровод; 6 – пьезодвигатель и крепление выходной щели S_3 (щель не показана)

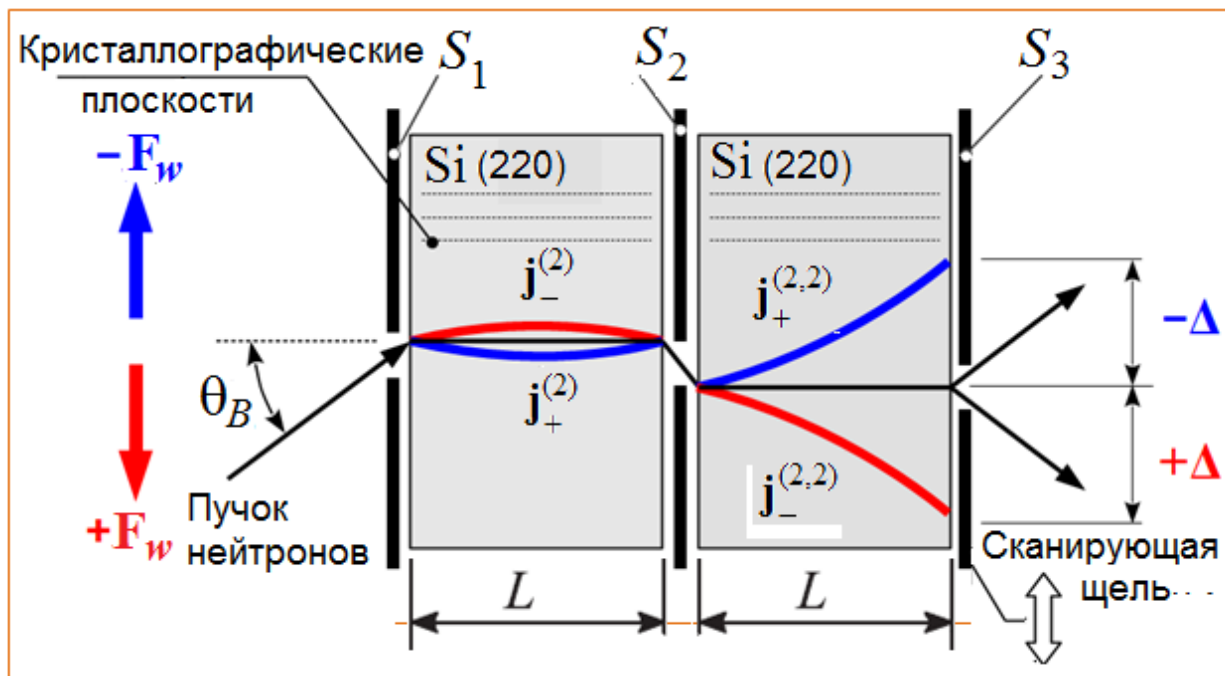
Размеры кристалла: $130 \times 130 \times 218$ мм³, степень совершенства $\Delta d/d \sim 10^{-7}$ по всему объему. Разрез посередине кристалла глубиной 72 мм и толщиной 1,6 мм позволяет использовать его в двухкристальной схеме дифракции.



В неоднородном магнитном поле на нейтроны с проекциями спинов по и против поля внутри кристалла будут действовать противоположные по направлению силы (как в опыте Штерна–Герлаха). К изменению же направления траектории Като приводят лишь компоненты сил, перпендикулярные рабочим плоскостям кристалла (220), $d = 1,92 \text{ \AA}$, вдоль вектора обратной решетки \mathbf{g} (ось x):

$$F_{\perp}^{(\pm)} = \mp \mu_n \frac{\partial B}{\partial x} \approx 6 \cdot 10^{-12} \left[\frac{\text{эВ}}{\text{Гс}} \right] \frac{\partial B}{\partial x} \left[\frac{\text{Гс}}{\text{см}} \right] \equiv \mp F_w,$$

В нашем случае (большие толщина кристалла и углы Брэгга, т.е. $L_{eff} \gg L_a$) в кристаллах «выживают» только антисимметричные слабопоглощаемые волны (2) для обоих спинов. Они отклоняются в разные стороны (см. рис.)



Щели S_1 и S_2 (при $x = 0$) выделяют в первом кристалле изогнутые под действием противоположных сил траектории нейтронов (задают начальные наклоны для 2-х проекций спина).

В отсутствие сил это были бы траектории с нулевым наклоном (параллельные плоскостям, т.е. оси z) нейтронов, падающих на кристалл точно под углом Брэгга.

Наличие внешней силы будет искривлять эти траектории, поэтому во вторую щель попадут нейтроны, падающие на первый кристалл с фиксированными (противоположными) параметрами отклонения от брэгговских условий.

Они определяют начальные углы наклона траекторий $\pm\alpha_0$. Их можно найти из уравнений траекторий из условия $x(0) = x(L) = 0$:

Напомним: $\frac{d^2 x}{dz^2} = \pm c_0^2 \frac{F_w}{V_g} \equiv \pm c_0^2 \frac{2E_n}{V_g} \frac{F_w}{2E_n} \rightarrow x = z \operatorname{tg} \alpha_0 \pm c_0^2 \frac{F_w}{2V_g} z^2$

$$L \operatorname{tg} \alpha_0 \pm c_0^2 \frac{F_w}{2V_g} L^2 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha_0 = \mp c_0^2 \frac{F_w L}{2V_g}$$

В результате эти траектории, отвечающие распространению в первом кристалле нейтронов с противоположными поляризациями будут описываться кривыми:

$$x^\pm(z) = \pm \frac{c_0^2 F_w}{2V_g} (L - z) z.$$

Во втором кристалле эти траектории начнутся с противоположными углами наклона, так что сила продолжит изгибать их в том же направлении

$$x^\pm(z) = \pm \frac{c_0^2 F_w}{2V_g} (L + z) z \quad \text{Смещение на выходной грани 2-го кристалла:} \quad x^\pm(2L) = \pm \frac{c_0^2 F_w}{V_g} L^2,$$

т.е. в такой схеме коллимации пучка эффект от двух кристаллов (толщиной L) удваивается (эффект для одного кристалла в случае удвоения его толщины учетверяется). Расщепление на выходе из 2-го кристалла:

$$\Delta_{2L} = \frac{2c_0^2 F_w}{V_g} L^2 = \frac{4c_0^2 E_n}{V_g} \frac{F_w}{2E_n} L^2.$$

Заметим, что чувствительность данного эксперимента к внешним силам, действующим на нейтрон в кристалле, определяется величиной силы F_w , необходимой для смещения пучка нейтронов на выходе из второго кристалла на величину ширины щели δ_{S3} :

$$F_\delta = \frac{V_g}{2c_0^2 E_n} \frac{2E_n}{L^2} \delta_{S3} = \frac{1}{K_D} \frac{2E_n}{L^2} \delta_{S3}.$$

Здесь K_D – коэффициент дифракционного усиления, величина $(2E_n \delta_{S3})/L^2$ есть сила, перпендикулярная направлению движения нейтрона и необходимая для смещения его на δ_{S3} в вакууме.

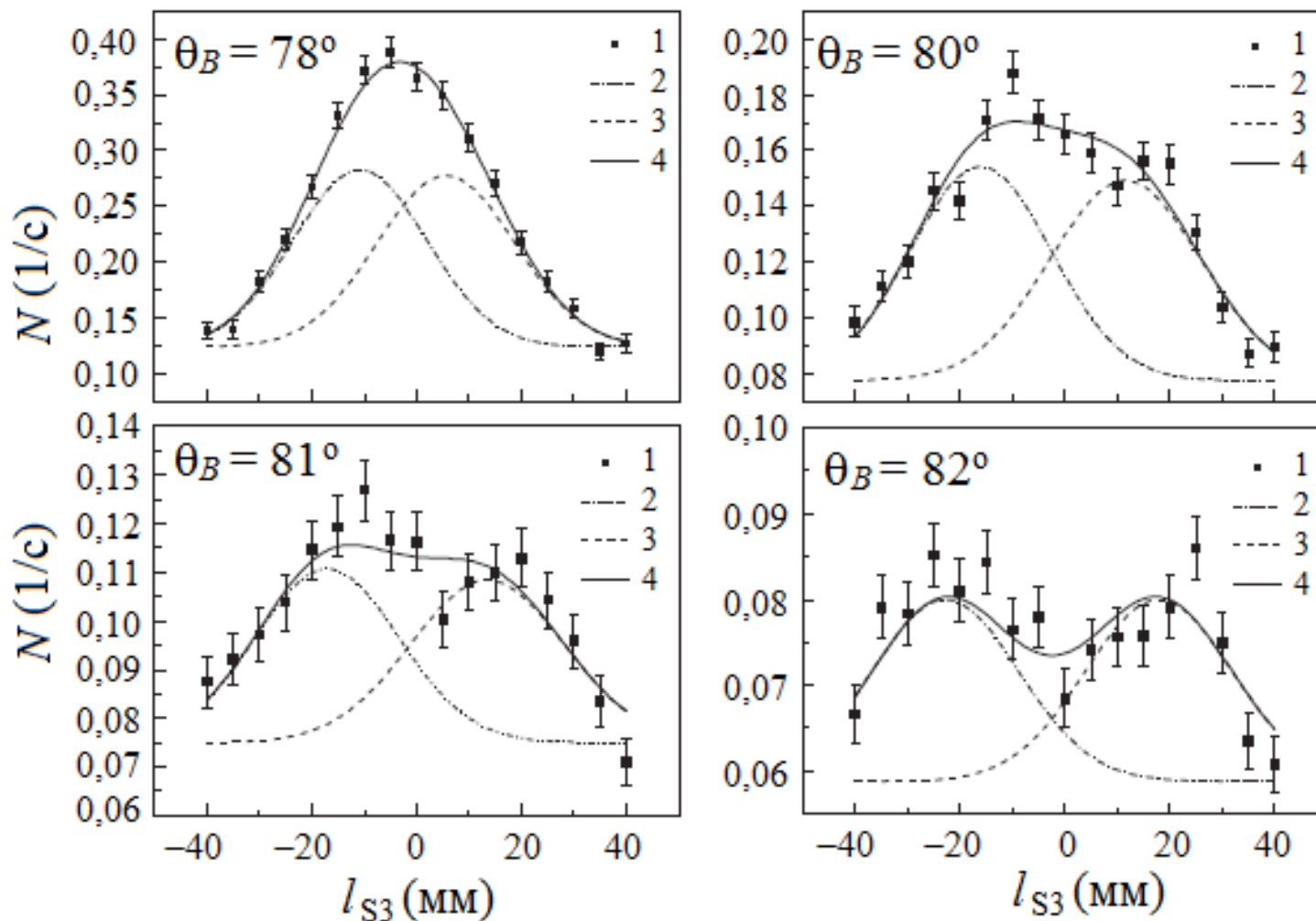
Как мы уже отмечали, для плоскости кристалла кремния (220), значение дифракционного коэффициента усиления составляет:

$$K_{D(Si)}^{220} = 2 \cdot 10^5 \text{tg}^2 \theta_B,$$

и достигает величины 10^7 для максимального угла Брэгга 82° в эксперименте.

Измерения проводились для **углов Брэгга θ_B от 78° до 82°** . Минимальные размеры коллимирующих щелей ($\delta_{S1} = 17$ мм, $\delta_{S2} = 15$ мм, $\delta_{S3} = 18$ мм) были выбраны из условий получения достаточной статистической точности за ₄₁ ограниченное время эксперимента

Результаты измерений



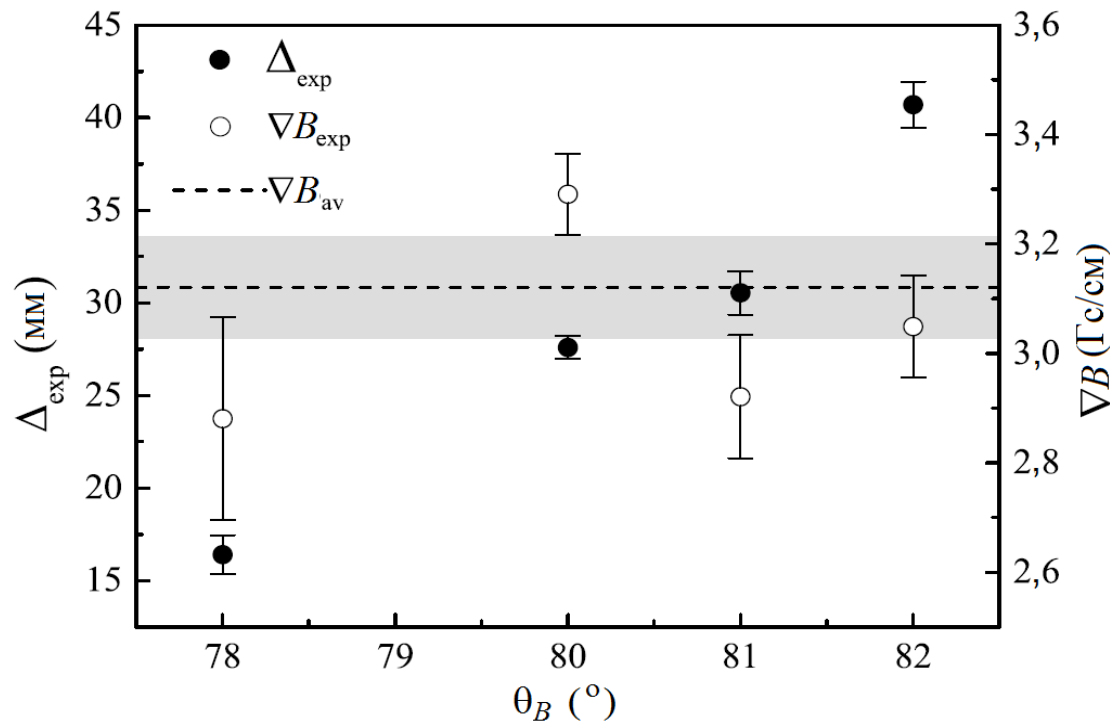
Распределение интенсивности N по выходной поверхности рабочего кристалла (l_{S3} – положение сканирующей щели S_3) при различных углах дифракции $\theta_B = (78 - 82)^\circ$ в присутствии градиента магнитного поля

При максимальном угле в 82° **величина расщепления** Δ_{exp} составляет

$$\Delta_{\text{exp}} = (4,1 \pm 0,1) \text{ см}$$

Из этих данных мы можем извлечь значение градиента поля (открытые кружки ниже на рис.)

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{E_n}{\mu_n K_{D(\text{Si})}^{220} L^2} \Delta_{\text{exp}}$$



Средняя величина градиента магнитного поля по пучку нейтронов в эксперименте получилась

$$\left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)_{\text{av}} = (3,12 \pm 0,09) \text{ Гс/см,}$$

что согласуется с оценками, основанными на показаниях магнитометра в трех точках с каждой стороны (вход и выход) кристалла, которые дали

$$3,0 \pm 0,3 \text{ Гс/см}$$

Расстояние между максимумами для двух проекций спина и градиент поля в зависимости от угла Брэгга. Пунктир – средняя величина градиента магнитного поля

Расчет пространственного расщепления пучка нейтронов с длиной волны $\lambda = 3,8 \text{ \AA}$, $E_n \approx 5,5 \text{ мЭВ}$ (что соответствует $\theta_B = 82^\circ$), в **свободном пространстве** при прохождении **того же градиента магнитного поля** через **такой же 3-щелевой коллиматор** (21,8 см), но **без кристалла** (удален из установки) дает $3,9 \cdot 10^{-7} \text{ см}$.

Чтобы расщепиться на **4,1 см** пучок должен пройти **~ 900 м!**

Таким образом, **экспериментально измеренный коэффициент дифракционного усиления**

$$K_{D(\text{Si})\text{exp}}^{220} \approx 2,1 \cdot 10^5 \text{ tg}^2 \theta_B \approx 1,05 \cdot 10^7$$

при $\theta_B = 82^\circ$, что хорошо согласуется с теорией.

Заключение

Проведено экспериментальное исследование малых воздействий на дифрагирующий нейтрон в зависимости от угла Брэгга при $\theta_B \sim 90^\circ$

Измерено **пространственное расщепление нейтронного пучка** на два с противоположными направлениями спина в слабом градиенте магнитного поля при дифракции по Лауэ в кристалле (**аналог эксперимента Штерна-Герлаха**)

Впервые наблюден усиления на 7 порядков эффекта Штерна – Герлаха для нейтрона в кристалле и измерен полный коэффициент дифракционного усиления внешней силы, действующей на нейтрон при углах Брэгга, близких к $\pi/2$. Его величина согласуется с теоретической.

Планы на будущее

Величина внешней силы, которая сдвигает пучок (двухкристальную линию) на выходной грани кристалла (по оси x) на величину выходной щели, в данном эксперименте равна

$$F_{\delta} = \frac{1}{K_{D(\text{Si})\text{exp}}^{220}} \frac{2E_n}{L^2} \delta_{S3} \approx 1,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{эВ}}{\text{см}} = 1,7 \cdot 10^{-2} m_n g_3.$$

Чувствительность эксперимента к внешней силе определяется

$$\sigma(F_{\text{ext}}) \approx \frac{4E_n \delta_{S3}}{\sqrt{N_m} K_D L^2} \approx \frac{2,2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{N_m}} \frac{\delta_{S3}}{L^2} \left[\frac{\text{эВ}}{\text{см}} \right].$$

Исходя из скоростей счета в данном эксперименте, можно оценить его чувствительность (ошибку измерения внешней силы), достигаемую за сутки:

$$\sigma(F_{\text{ext}}) \approx 2 \cdot 10^{-12} \frac{\text{эВ}}{\text{см} \cdot \text{сут}} = 2 \cdot 10^{-3} m_n g_3 \frac{1}{\text{сут}}.$$

Оптимизация установки

1) Использование **источников холодных нейтронов с высокими потоками** (таких, как например, запланированный на реакторе ПИК со спектральной плотностью потока нейтронов $\sim 5 \cdot 10^8$ н/Å·см²·с) позволяют, в принципе, использовать щели размером $\sim 0,1$ мм и углы Брэгга до **88°**, при этом скорость счета нейтронов от одной выходной щели может достигать **50 н/с**, что в результате дает улучшение чувствительности примерно в **12000 раз**.

2) Использование вместо одиночных щелей **многощелевых коллимирующих систем**.

Многощелевой вариант (**например, 100 щелей**) дает увеличение чувствительности еще на порядок. Таким образом, в принципе достижима чувствительность на уровне

$$\sigma(F_{\text{ext}}) \approx 1,7 \cdot 10^{-17} \frac{\text{эВ}}{\text{см} \cdot \text{сут}} = 1,7 \cdot 10^{-8} m_n g_3 \frac{1}{\text{сут}},$$

Возможное применение такой установки может быть связано с измерением отношения инертной и гравитационной масс нейтрона.

Проверка эквивалентности инертной и гравитационной масс нейтрона

Земля находится на стационарной орбите вокруг Солнца, т.е. для нее гравитационное притяжение Солнца, которое пропорционально гравитационной массе, уравновешено центробежной силой, пропорциональной инертной массе. Если нейтрон имеет другое, чем у Земли, отношение инертной массы к гравитационной, то в системе отсчета, связанной с Землей, на нейтрон будет действовать добавочная сила

$$F_{I-G} \equiv F_I - F_G = \frac{(m_{nI} - m_{nG})GM_S}{R_O^2} \equiv \left(\frac{m_{nI}}{m_{nG}} - 1 \right) F_{GS},$$

эта сила будет испытывать суточные вариации за счет вращения Земли вокруг своей оси.

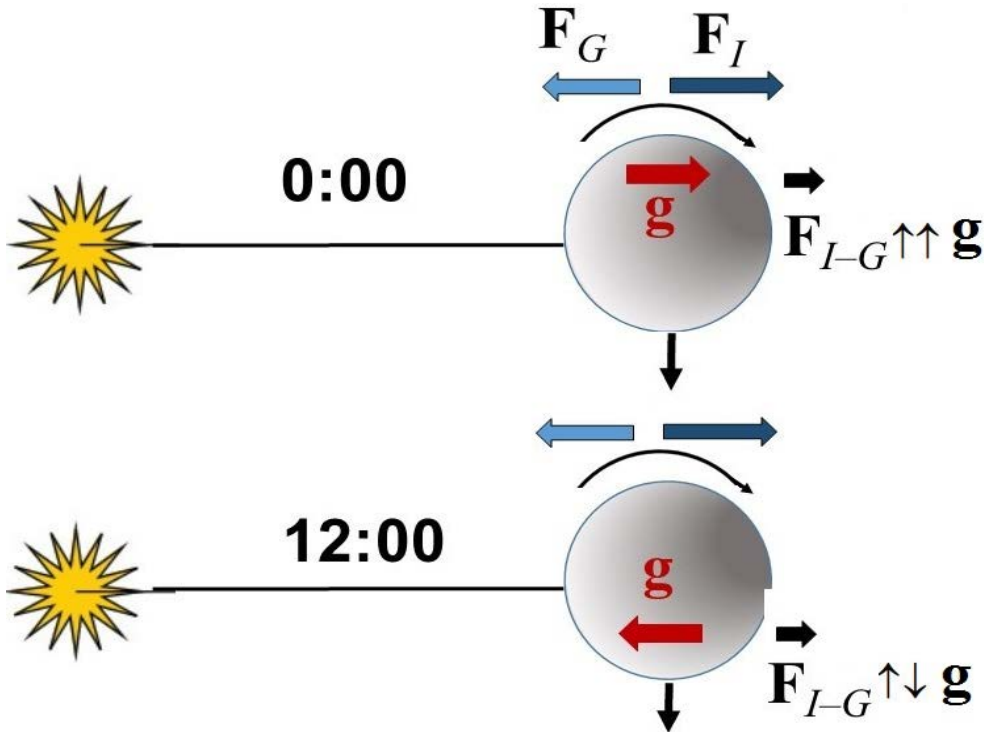
Сила притяжения нейтрона Солнцем на орбите Земли составляет

$$F_{GS} = G \frac{m_{nG} M_S}{R_O^2} = 6 \cdot 10^{-13} \text{ ЭВ/см} \approx 6 \cdot 10^{-4} m_n g_3,$$

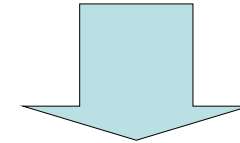
так что чувствительность к силе соответствует

$$\sigma(m_{nI} / m_{nG}) \sim 3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{сут}},$$

Проверка слабого принципа эквивалентности



Сила будет менять знак каждые 12 часов



Будем видеть суточные колебания интенсивности

За 100 сут. набора статистики можно получить ошибку

$$\sigma(m_{nI} / m_{nG}) \sim 3 \cdot 10^{-6}.$$

Современная точность:

$$\sigma(m_{nI} / m_{nG}) \sim 1,7 \cdot 10^{-4}$$

J. Schmiedmayer (1989)

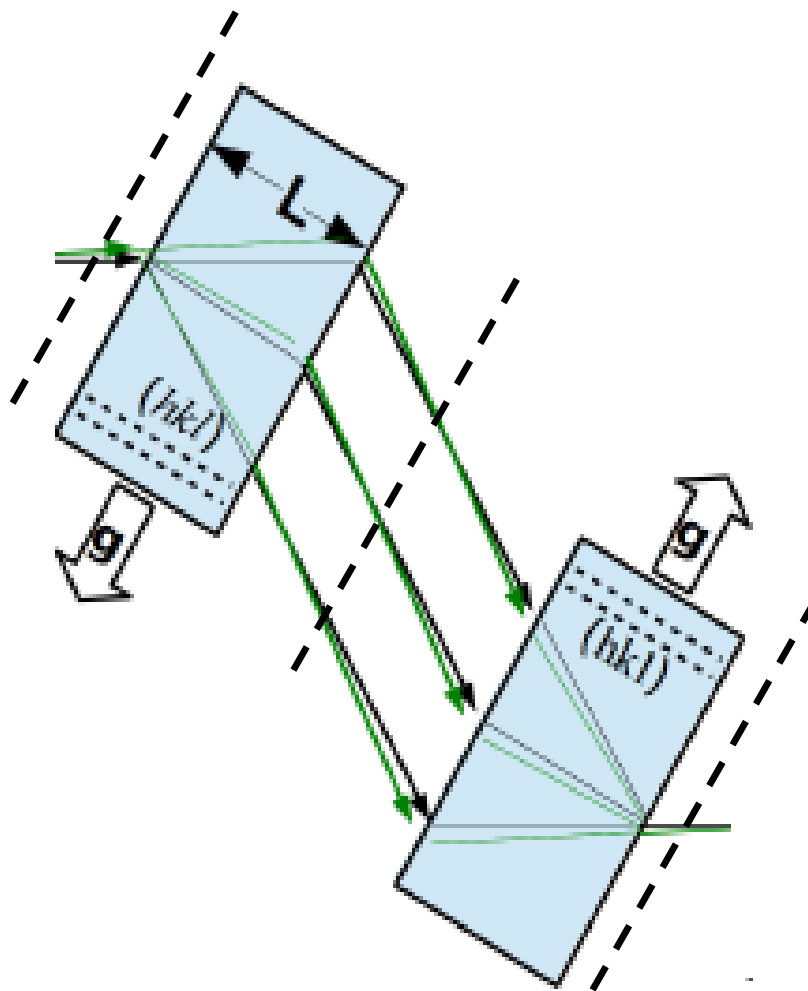
Показана ориентация установки (кристалла) относительно Солнца,

\mathbf{g} – вектор обратной решетки

кристалла. Для простоты, здесь ось вращения Земли параллельна оси ее движения вокруг Солнца

Следующие этап:

Создание установки с расстоянием между кристаллами ~ 1 м с использованием многоцелевых коллиматоров



Возможные применения

1. Чувствительность к **электрическому заряду нейтрона** позволяет улучшить предел на его величину по крайней мере **на порядок** по сравнению с современным ограничением ($|q_n| < 1,3 \cdot 10^{-21} e$);
2. С большей точностью можно измерять **амплитуды рассеяния нейтронов** как в газах, так и твердых телах;
3. Дифракция нейтронов в совершенных кристаллах позволяет определять степень совершенства кристалла – **однородность $\Delta d/d$ на уровне $\sim (10^{-6} - 10^{-8})$**

Спасибо за внимание !